

5 Integrale mit Parameter

In diesem Abschnitt geht es um die Ableitung von Integralen die von einem Parameter abhängig sind. Wir beginnen gleich mit einem einfachen Beispiel.

Beispiel Gegeben ist die Funktion $t \rightarrow \sqrt{t}$. Wir vergleichen im Intervall $[0, 1]$ diese Funktion mit linearen Funktionen der Form $t \rightarrow xt$, $0 \leq x < \infty$. Für welchen Wert von x ist die Grösse

$$\Phi(x) = \int_0^1 (\sqrt{t} - xt)^2 dt$$

minimal (siehe Figur 1)?

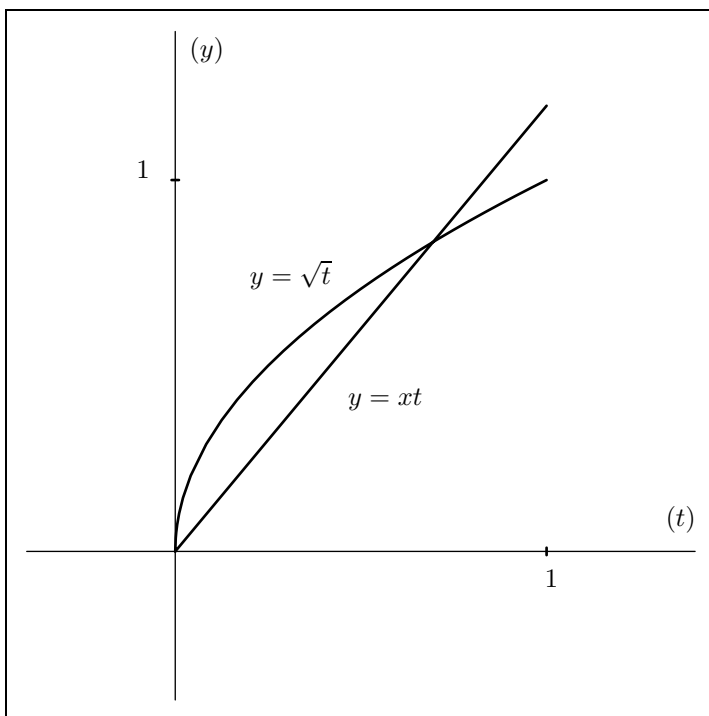


FIG. 1 :
Approximation der
Wurzelfunktion durch eine
lineare Funktion

Zur Lösung suchen wir die Minimalstelle der Funktion

$$x \rightarrow \Phi(x) = \int_0^1 (\sqrt{t} - xt)^2 dt$$

im Intervall $[0, \infty)$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \int_0^1 (\sqrt{t} - xt)^2 dt \\ &= \left[\frac{1}{2} t^2 - \frac{4}{5} xt^{5/2} + \frac{1}{3} x^2 t^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{4}{5}x + \frac{1}{3}x^2 .\end{aligned}$$

Die Ableitung beträgt

$$\frac{d}{dx}\Phi(x) = \frac{d}{dx} \int_0^1 (\sqrt{t} - xt)^2 dt = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{5}x + \frac{1}{3}x^2 \right) = -\frac{4}{5} + \frac{2}{3}x .$$

Nullsetzen liefert

$$x = \frac{6}{5} .$$

Man zeigt leicht, dass es sich dabei um die globale Minimalstelle handelt.

In diesem Beispiel tritt auf natürliche Weise die Ableitung eines bestimmten Integrals nach einem Parameter auf. In dieser Situation erlaubt der folgende Satz oft eine Vereinfachung.

Satz Gegeben sei eine stetige Funktion von zwei Variablen

$$f : (t, x) \rightarrow f(t, x) .$$

Ferner sei die partielle Ableitung f_x ebenfalls stetig. Dann gilt

$$\frac{d}{dx} \int_a^b f(t, x) dt = \int_a^b f_x(t, x) dt .$$

Wenden wir die Aussage des Satzes auf unser Beispiel an, so lässt sich die Rechnung, die zur Ableitung der Funktion Φ führt, etwas vereinfachen

$$\frac{d}{dx} \int_0^1 (\sqrt{t} - xt)^2 dt = \int_0^1 2(\sqrt{t} - xt)(-t) dt = \int_0^1 (2xt^2 - 2t^{3/2}) dt = \left[\frac{2}{3}xt^3 - \frac{4}{5}t^{5/2} \right]_0^1 = \frac{2}{3}x - \frac{4}{5} .$$

Beweis des Satzes: Für den Differenzenquotienten der Funktion Φ erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} &= \frac{1}{h} \left(\int_a^b f(t, x+h) dt - \int_a^b f(t, x) dt \right) \\ &= \frac{1}{h} \int_a^b (f(t, x+h) - f(t, x)) dt .\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} - \int_a^b f_x(t, x) dt = \int_a^b \left(\frac{f(t, x+h) - f(t, x)}{h} - f_x(t, x) \right) dt .$$

Für $h \rightarrow 0$ strebt der Integrand des letzten Integrals und damit auch das Integral selbst gegen Null. Damit folgt

$$\Phi'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \int_a^b f_x(t, x) dt .$$

Dies ist die Aussage des Satzes.

Beispiel Wir behaupten, dass die Funktion

$$\Phi : x \rightarrow \int_0^\pi \cos(x \sin t) dt$$

Lösung der Differentialgleichung

$$\Phi'' + \frac{1}{x}\Phi' + \Phi = 0$$

ist.

Wir bemerken zuerst, dass das Integral nicht elementar auswertbar ist. Deshalb *muss* in diesem Fall die Ableitung mit Hilfe unseres Satzes *unter* dem Integral erfolgen. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\Phi'(x) &= - \int_0^\pi \sin(x \sin t) \sin t dt , \\ \Phi''(x) &= - \int_0^\pi \cos(x \sin t) \sin^2 t dt .\end{aligned}$$

Wir wenden nun auf $\Phi'(x)$ partielle Integration an, wobei wir

$$\begin{aligned}u(t) &= \sin(x \sin t) , & \dot{u}(t) &= x \cos(x \sin t) \cos t , \\ \dot{v}(t) &= \sin t , & v(t) &= -\cos t\end{aligned}$$

setzen, und erhalten

$$\begin{aligned}
\Phi'(x) &= [\cos t \sin(x \sin t)]_0^\pi - \int_0^\pi x \cos(x \sin t) \cos^2 t \, dt \\
&= -x \int_0^\pi \cos(x \sin t) \cos^2 t \, dt .
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\Phi'' + \frac{1}{x}\Phi' + \Phi = \int_0^\pi \left(-\cos(x \sin t) \sin^2 t - \frac{x}{x} \cos(x \sin t) \cos^2 t + \cos(x \sin t) \right) dt = 0 ,$$

und Φ ist in der Tat Lösung der Differentialgleichung.

Beispiel Das Integral

$$\int_0^1 \frac{t^x - 1}{\log t} \, dt =: \Phi(x) , \quad x \geq 0$$

hat die Eigenschaft, dass die Stammfunktion des Integranden nicht elementar ausdrückbar ist. Trotzdem lässt sich sein Wert für alle x berechnen. Dabei machen wir von unserem Satz Gebrauch. Statt den Wert $\Phi(x)$ direkt zu bestimmen, wenden wir uns zuerst der Ableitungsfunktion $\Phi'(x)$ zu. Mit Hilfe unseres Satzes erhalten wir

$$\begin{aligned}
\Phi'(x) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \frac{t^x - 1}{\log t} \, dt \\
&= \int_0^1 \frac{\log t \cdot t^x}{\log t} \, dt \\
&= \frac{1}{x+1} [t^{x+1}]_0^1 \\
&= \frac{1}{x+1} .
\end{aligned}$$

Daraus folgt $\Phi(x) = \log(x+1) + C$, und wegen $\Phi(0) = 0$ gilt schliesslich

$$\Phi(x) = \log(x+1) .$$

Im zweiten Teil dieses Abschnittes beschäftigen wir uns noch mit dem etwas komplizierteren Fall, wo der Parameter nicht nur im Integranden sondern auch in den *Grenzen* des Integrals vorkommt. Wir betrachten also für die Funktionen

$$x \rightarrow u(x) , \quad x \rightarrow v(x)$$

die durch die Integralformel

$$\Psi : x \rightarrow \Psi(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t, x) \, dt$$

definierte Funktion. Dann gilt der

Satz

$$\Psi'(x) = f(v(x), x) v'(x) - f(u(x), x) u'(x) + \int_{u(x)}^{v(x)} f_x(t, x) \, dt$$

Bevor wir ihn beweisen, betrachten wir die folgenden Spezialfälle.

Sind die Funktionen u und v konstant, so erhält man die Aussage des früheren Satzes.

Ist $u = a$ konstant, $v(x) = x$ und ist der Integrand nicht von x abhängig, so folgt

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) \, dt = f(x) .$$

Dies ist nichts anderes als der wohlbekannte Hauptsatz der Infinitesimalrechnung: “Die Ableitung eines bestimmten Integrals nach der oberen Grenze ist der Wert des Integranden an der oberen Grenze” (siehe Kapitel III, Abschnitt 2).

Beweis Wir betrachten zuerst die Funktion von drei Variablen

$$(u, v, w) \rightarrow \psi(u, v, w) = \int_u^v f(t, w) \, dt$$

und definieren die zusammengesetzte Funktion Ψ durch

$$\Psi(x) = \psi(u(x), v(x), w(x)) .$$

Die verallgemeinerte Kettenregel liefert dann

$$\frac{d}{dx} \Psi(x) = \psi_u u' + \psi_v v' + \psi_w w' .$$

Schliesslich betrachten wir den Spezialfall $w(x) = x$ und wenden auf die ersten beiden Ausdrücke den Hauptsatz der Infinitesimalrechnung an (siehe oben). Dann erhalten wir

$$\frac{d}{dx}\Psi(x) = -f(u(x), x) u'(x) + f(v(x), x) v'(x) + \int_{u(x)}^{v(x)} f_x(t, x) dt .$$

Dies war zu beweisen.

Beispiel Wir betrachten hier ein Anwendungsbeispiel aus der Mechanik, welches eine Beziehung zwischen der Querkraft und dem Biegemoment eines belasteten Balkens betrifft. Ein an beiden Enden frei aufgestützter waagrechter Balken trage die durch die Funktion

$$x \rightarrow p(x)$$

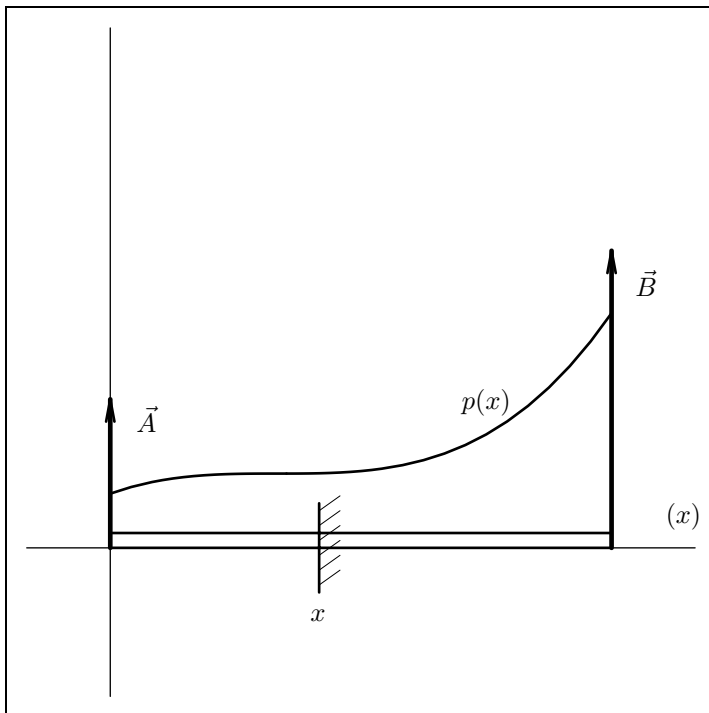


FIG. 2:
Querkraft und Biegemoment
eines belasteten Balkens

beschriebene Last (siehe Figur 2). Die Reaktionskraft im linken Lager sei \vec{A} , diejenige im rechten Lager \vec{B} . Im Schnitt an der Stelle x ergibt sich die Querkraft

$$Q(x) = A - \int_0^x p(t) dt$$

und das Biegemoment

$$M(x) = -Ax + \int_0^x (x-t)p(t) \, dt .$$

Es wird nun in der Mechanik behauptet, dass die Beziehung

$$\frac{d}{dx}M(x) = -Q(x)$$

gilt. Der von uns oben ausgesprochene Satz liefert diese Aussage nach kurzer Rechnung. Es gilt nämlich

$$\frac{d}{dx}M(x) = -A + 1 \cdot (x-x)p(x) + \int_0^x 1 \, p(t) \, dt = -Q(x) .$$

Man vergleiche zu diesem Thema M.B. Sayir: Mechanik 1, p. 201 ff.