

1 Das Gebietsintegral

Wir führen in diesem Abschnitt Gebietsintegrale, d.h. Integrale über eine Funktion von zwei Variablen in Analogie zu gewöhnlichen Integralen ein. Die Interpretation solcher Integrale in einem Spezialfall führt uns dann dazu, diese mit Hilfe von zwei aufeinanderfolgenden Integrationen über die beiden Variablen zu berechnen.

Zuerst zur Definition. Wie schon beim bestimmten Integral über eine Funktion einer Variablen werden wir uns auch hier mit einer Definition begnügen, die nicht den allgemeinsten Fall abdeckt, die aber für die Anwendungen, die wir im Auge haben, durchaus genügt. Zum einen werden wir nur stetige Funktionen $f : (x, y) \rightarrow f(x, y)$ als Integrand zulassen; zum andern wollen wir voraussetzen, dass der Integrationsbereich B endlich und durch eine differenzierbare Kurve (ohne Doppelpunkte) begrenzt wird. Die folgenden Schritte führen dann zur Definition des **Gebietsintegrals** (siehe Figur 1).

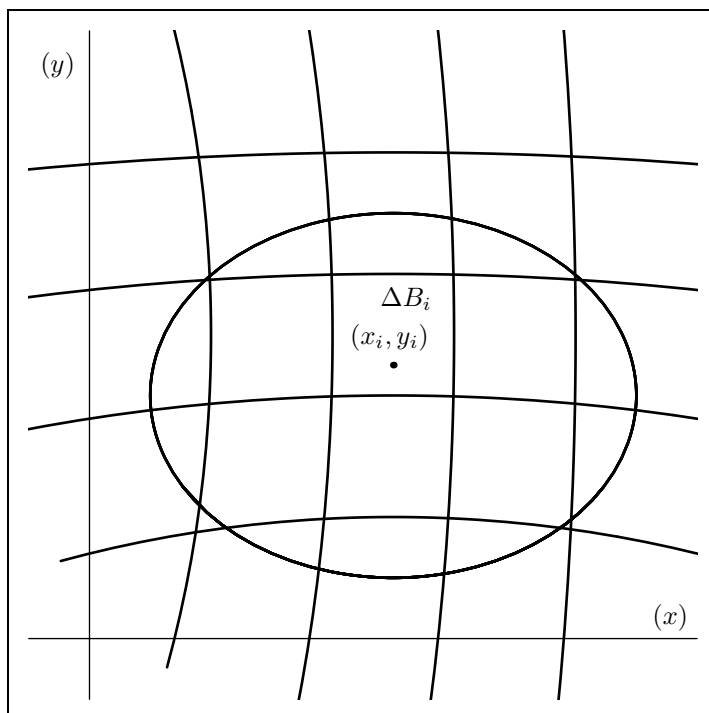


FIG. 1:
Zur Definition des
Gebietsintegrals

- (a) Teile B (durch differenzierbare Kurven) in Teilbereiche ΔB_i mit Flächeninhalt ΔF_i ein,
 $i = 1, 2, \dots, n$.

- (b) Wähle in jedem Teilbereich ΔB_i , $i = 1, 2, \dots, n$ einen Punkt (x_i, y_i) . Unter der Feinheit der Einteilung verstehen wir den Durchmesser der kleinsten Kreisscheibe, welche in der Lage ist, jeden einzelnen der Teilbereiche ΔB_i zu überdecken.
- (c) Bilde die Riemann'sche Summe

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta F_i .$$

- (d) Definiere das Gebietsintegral als Grenzwert

$$\iint_B f(x, y) dF = \lim \left(\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta F_i \right) ,$$

wobei für den Grenzübergang eine Folge von Einteilungen von B zugrunde zu legen ist, deren Feinheit gegen Null strebt.

Es gilt das Resultat - sonst wäre die Definition nicht sinnvoll -, dass unter den getroffenen Voraussetzungen der Wert des Limes unabhängig von der gewählten Einteilungsfolge ist.

Ein Gebietsintegral tritt auf natürliche Art im folgenden Beispiel auf.

Beispiel Es sei $f : (x, y) \rightarrow f(x, y)$ eine auf B definierte stetige Funktion. Wie gross ist das Volumen V des über dem Bereich B liegenden Körpers, welcher gegen oben durch den Graphen von f begrenzt wird?

Die zu einer Einteilung von B gehörige Riemann'sche Summe liefert offensichtlich eine Approximation für V . Das Volumen selbst wird als Limes erhalten, wenn die Feinheit der Einteilung gegen Null geht; es gilt also

$$V = \iint_B f(x, y) dF .$$

Dieses Beispiel legt uns unmittelbar auch eine Berechnungsart für das Integral nahe. Wir zerschneiden den Körper wie in Kapitel III, Abschnitt 9 durch Schnitte parallel zur (y, z) -Ebene in dünne Scheiben (siehe Figur 2). Ist $F(x)$ der Flächeninhalt der Schnittfigur an der Stelle x , so ist das gesuchte Volumen V durch

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} F(x) dx$$

gegeben. Um den Flächeninhalt $F(x)$ zu bestimmen, zeichnen wir den entsprechenden Schnitt auf (siehe Figur 3). Offensichtlich gilt

$$F(x) = \int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} f(x, y) dy .$$

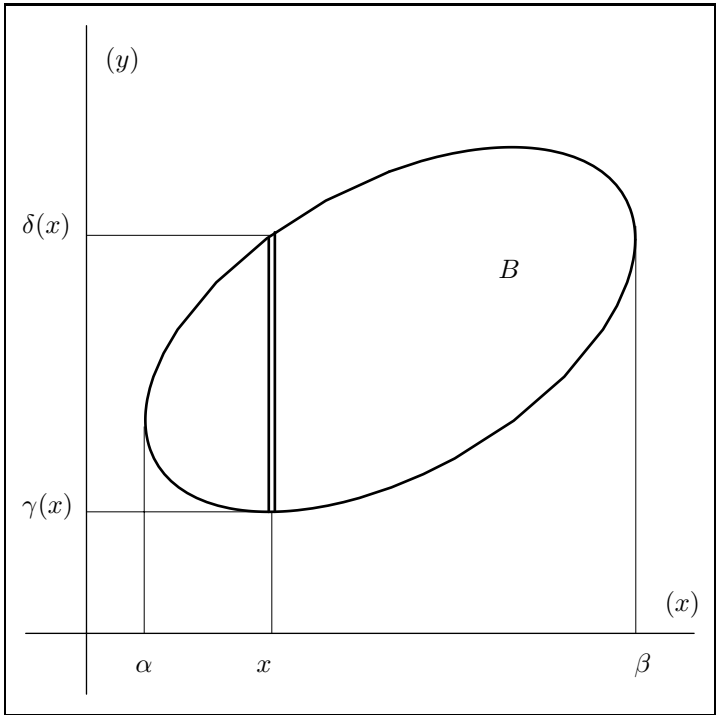


FIG. 2 :
Erste Berechnungsart

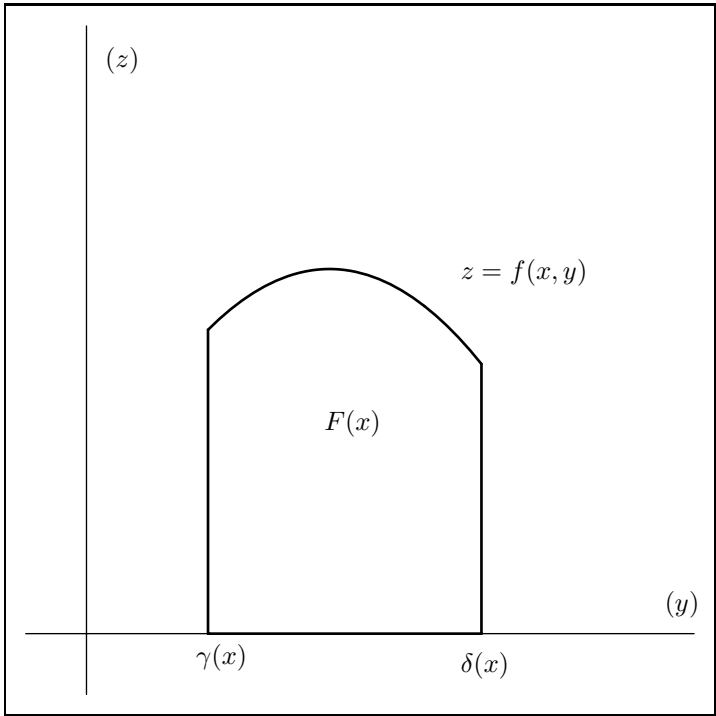


FIG. 3 :
Erste Berechnungsart; Schnitt
bei x

(Wir nehmen hier stillschweigend an, dass für jedes $\alpha \leq x \leq \beta$ der Schnitt an der Stelle x den Rand des Bereiches B in höchstens zwei Punkten schneidet. Sollte das nicht von Anfang an der Fall sein, so müsste der Bereich entsprechend unterteilt werden.) Das Volumen des Körpers drückt sich dann durch

$$V = \iint_B f(x, y) \, dF = \int_{\alpha}^{\beta} F(x) \, dx = \int_{\alpha}^{\beta} dx \int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} f(x, y) \, dy$$

aus. Die letztere Formel ist ein sogenanntes *Doppelintegral*. Sie liefert eine Berechnungsart für das Gebietsintegral: in einem ersten Schritt wird das “innere” und in einem zweiten Schritt das “äussere” Integral ausgewertet.

Beispiel Es sei $f : (x, y) \rightarrow f(x, y) = x$ gegeben und als Integrationsbereich B der zu $x \geq 0$ gehörige Teil der Ellipsenfläche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

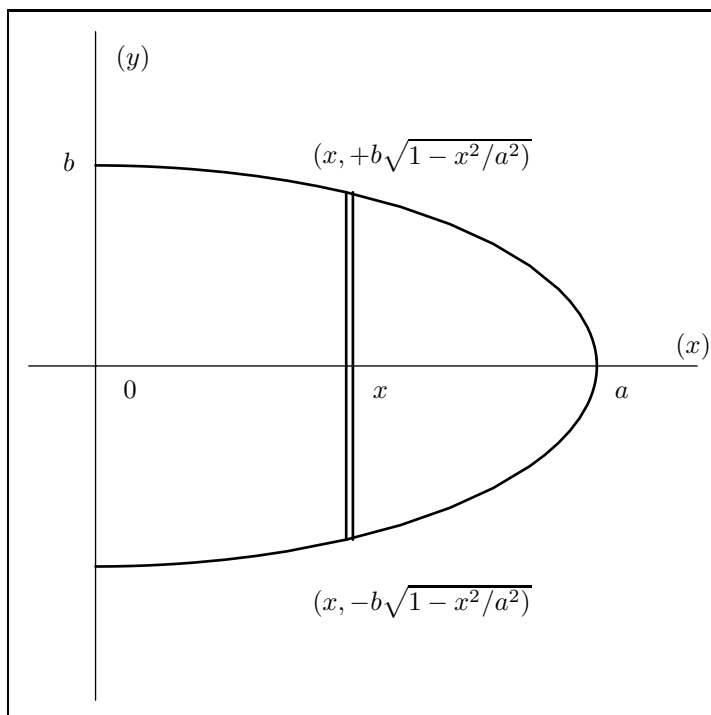


FIG. 4:
Erste Berechnungsart;
Beispiel

Es sei $0 \leq x \leq a$ (siehe Figur 4). Dann sind $\gamma(x)$ und $\delta(x)$ durch

$$\gamma(x) = -b\sqrt{1 - x^2/a^2} \ , \quad \delta(x) = +b\sqrt{1 - x^2/a^2}$$

gegeben. Ferner gilt $\alpha = 0$, $\beta = +a$. Man erhält dann der Reihe nach

$$\begin{aligned} V &= \iint_B x \, dF \\ &= \int_0^a dx \int_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{+b\sqrt{1-x^2/a^2}} x \, dy \\ &= \int_0^a dx \, [xy]_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{+b\sqrt{1-x^2/a^2}} \\ &= 2 \int_0^a dx \, xb \sqrt{1 - x^2/a^2} \\ &= -2ba^2 \frac{1}{3} \left[(1 - x^2/a^2)^{3/2} \right]_0^a \\ &= \frac{2}{3} ba^2 \ . \end{aligned}$$

Es ist natürlich klar, dass die Rolle der Variablen x und y vertauscht werden kann (siehe Figur 5): Zerschneiden wir den Körper durch Ebenen parallel zur (x, z) -Ebene, so wird der Flächeninhalt der zu y gehörigen Schnittfigur durch

$$\tilde{F}(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) \, dx$$

gegeben, so dass wir

$$V = \iint_B f(x, y) \, dF = \int_{\gamma}^{\delta} \tilde{F}(y) \, dy = \int_{\gamma}^{\delta} dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) \, dx$$

erhalten.

Beispiel Für das oben bereits betrachtete Beispiel

$$\iint_B x \, dF$$

erhalten wir für die Grössen $\alpha(y)$, $\beta(y)$

$$\alpha(y) = 0 \ , \quad \beta(y) = a\sqrt{1 - y^2/b^2} \ .$$

(siehe Figur 6). Ausserdem gilt $\gamma = -b$, $\delta = b$. Daraus ergibt sich

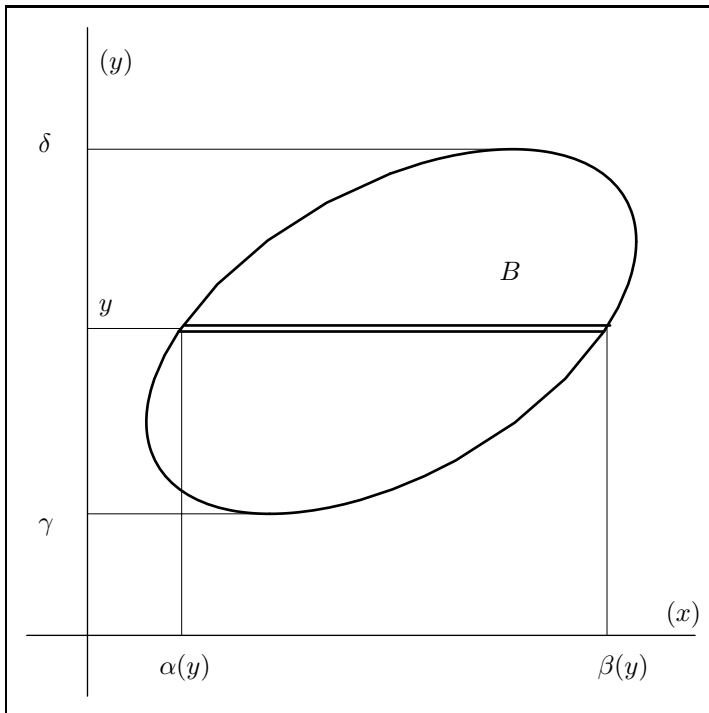


FIG. 5:
Zweite Berechnungsart

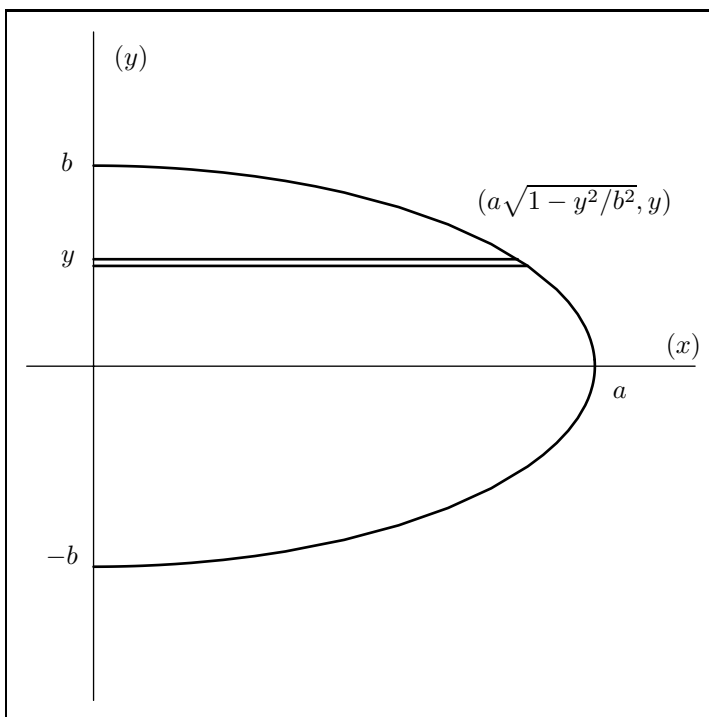


FIG. 6:
Zweite Berechnungsart;
Beispiel

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_B x \, dF \\
 &= \int_{-b}^{+b} dy \int_0^{a\sqrt{1-y^2/b^2}} x \, dx \\
 &= \int_{-b}^{+b} dy \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{a\sqrt{1-y^2/b^2}} \\
 &= \frac{a^2}{2} \int_{-b}^{+b} dy (1 - y^2/b^2) \\
 &= \frac{a^2}{2} \left[y - \frac{y^3}{3b^2} \right]_{-b}^{+b} \\
 &= \frac{a^2}{2} 2 \left(b - \frac{1}{3}b \right) \\
 &= \frac{2}{3} a^2 b .
 \end{aligned}$$

Es ist an dieser Stelle wichtig zu erkennen, dass die Berechnung eines Gebietsintegrals durch eine zweifache Integration natürlich nicht davon abhängig ist, dass das Gebietsintegral

$$\iint_B f(x, y) \, dF$$

ein Volumen ausdrückt. In der Tat ist die Interpretation des Gebietsintegrals als Volumen nur eine von vielen möglichen Interpretationen, wie ja auch die Interpretation des gewöhnlichen bestimmten Integrals als Flächeninhalt nur eine von vielen möglichen Interpretationen ist.

Beispiel Wir betrachten den zu $x \geq 0$ gehörigen Teil B der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

Man berechne den Schwerpunkt S des Flächenstücks, wenn es homogen mit Masse belegt ist.

Ist $S = (x_S, y_S)$, so gilt aus Symmetriegründen natürlich $y_S = 0$. Um x_S zu berechnen, liefert die Momentbedingung die Beziehung

$$x_S \cdot F = \iint_B x \, dF ,$$

wo F den Flächeninhalt der Halbellipse bezeichnet. Das hier auftretende Gebietsintegral drückt ein Moment aus; sein Wert wurde aber bereits im vorhergehenden Beispiel bestimmt, als es um die Berechnung eines Volumens ging. Auch hier würde man seinen Wert durch die gleiche Technik, d.h. durch doppelte Integration bestimmen. Verwenden wir das oben hergeleitete Resultat, so erhalten wir

$$x_S = \frac{2}{\pi a b} \frac{2}{3} a^2 b = \frac{4}{3\pi} a .$$

Gebietsintegrale treten in vielen Anwendungen auf; als Beispiele erwähnen wir

- Berechnung der Gesamtmasse bei gegebener Flächendichte auf B ,
- Berechnung der Gesamtladung bei gegebener Flächenladungsdichte auf B ,
- Berechnung des hydrostatischen Drucks auf eine senkrechte Wand der Form B ,
- Berechnung des Schwerpunktes eines ebenen Bereiches B ,
- Berechnung des Flächenträgheitsmomentes eines ebenen Bereiches B .

Zur letzten Anwendung betrachten wir das folgende konkrete Beispiel.

Beispiel Gesucht ist das polare Trägheitsmoment J_0 eines gleichseitigen Dreiecks mit Seite a bezüglich seines Schwerpunktes (siehe Figur 7).

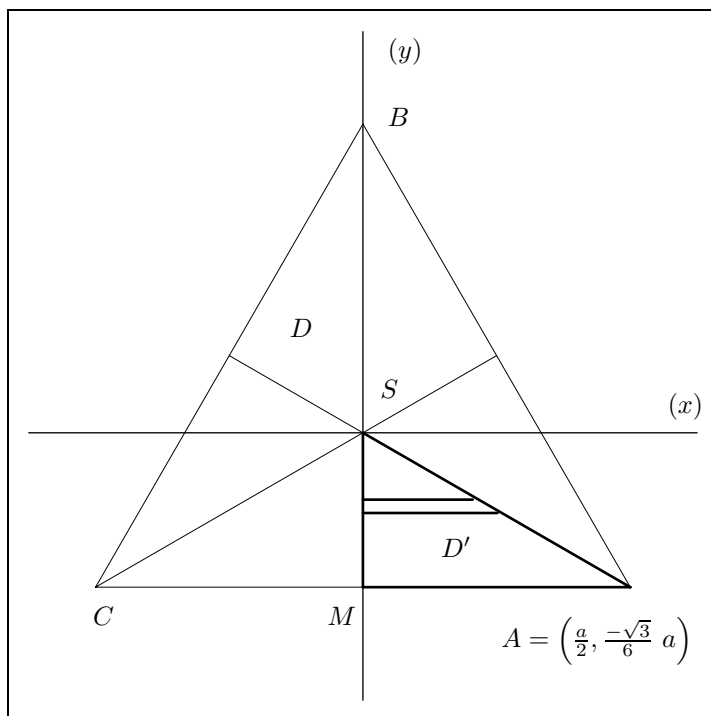


FIG. 7:
Polares Trägheitsmoment eines
gleichseitigen Dreiecks bezüglich
seines Schwerpunktes

Wir wählen das Koordinatensystem so, dass sein Nullpunkt mit dem Schwerpunkt S zusammenfällt und eine Ecke des Dreiecks auf der positiven y -Achse liegt. Nach der Definition des polaren Flächenträgheitsmomentes (siehe Mechanik) gilt

$$J_0 = \iint_D (x^2 + y^2) dF ,$$

wo D das gleichseitige Dreieck bezeichnet. Es gilt

$$A = \left(\frac{a}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{6} a \right) ,$$

und die durch SA bestimmte Gerade hat die Gleichung

$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}} x .$$

Aus Symmetriegründen erhalten wir

$$J_0 = 6 \cdot \iint_{D'} (x^2 + y^2) dF ,$$

wo D' das Dreieck ASM bezeichnet. Wir erhalten

$$\begin{aligned} J_0 &= 6 \cdot \int_{-\frac{\sqrt{3}}{6}a}^0 dy \int_0^{-\sqrt{3}y} dx (x^2 + y^2) \\ &= 6 \cdot \int_{-\frac{\sqrt{3}}{6}a}^0 dy \left[\frac{x^3}{3} + xy^2 \right]_0^{-\sqrt{3}y} \\ &= 6 \cdot \int_{-\frac{\sqrt{3}}{6}a}^0 dy (-\sqrt{3}y^3 - \sqrt{3}y^3) \\ &= -2 \cdot 6 \cdot \sqrt{3} \int_{-\frac{\sqrt{3}}{6}a}^0 y^3 dy \\ &= -2 \cdot 6 \cdot \sqrt{3} \left[\frac{y^4}{4} \right]_{-\frac{\sqrt{3}}{6}a}^0 \\ &= 3 \cdot \sqrt{3} \frac{9a^4}{2^4 \cdot 3^4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3 \cdot 16} a^4 . \end{aligned}$$

Wir überlassen es dem Leser, das Resultat zu kontrollieren, indem die zweifache Integration in der umgekehrten Reihenfolge durchgeführt wird.

2 Koordinatentransformationen bei Gebietsintegralen

Wir beginnen hier mit einem Beispiel, das zeigt, wie die geschickte Wahl eines dem Problem angepassten neuen Koordinatensystems die Berechnung eines Gebietsintegrals erleichtern kann.

Beispiel Aus einer Kugel mit Radius a wird ein Loch in der Form eines geraden Kreiszylinders mit Grundkreisradius $a/2$ herausgebohrt und zwar so, dass die Achse des Kreiszylinders den Kugelmittelpunkt enthält. Wie gross ist das Volumen des herausgebohrten Teils der Kugel?

Wir geben uns die Kugel durch $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ und wählen die z -Achse als Zylinderachse (siehe Figur 1). Der Grundkreis des Zylinders wird durch

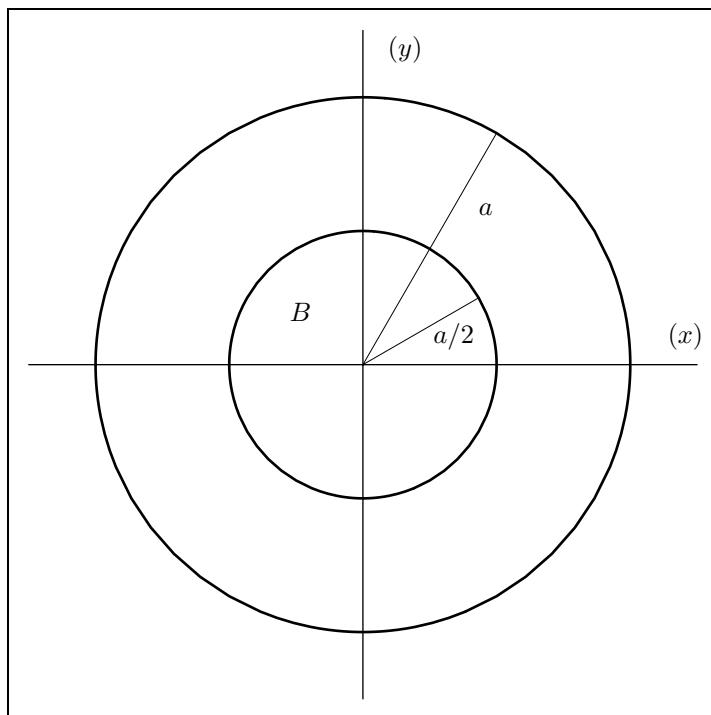


FIG. 1 :
Zentrale zylindrische
Ausbohrung der Kugel

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

beschrieben. Das gesuchte Volumen V ist dann durch das Gebietsintegral

$$2 \iint_B \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \, dF$$