

Repetition: Kapitel V. Funktionen von mehreren Variablen. Integralrechnung

V.4. Zur Transformation von Gebiets- und Volumenintegralen

Das Studium neuer Koordinatensysteme führt in natürlicher Weise zu der so genannten *Funktionalmatrix* und der *Funktionaldeterminante* (Seite 37 ff). Man rufe sich die Definition von Funktionalmatrix und Funktionaldeterminante in Erinnerung.

Test *Man gebe die allgemeine Formel für das Flächenelement im neuen Koordinatensystem und verifiziere damit die Formel für das Flächenelement bei Polarkoordinaten.*

Test *Worin besteht eine Koordinatentransformation in einer Dimension? Man zeige, dass die in der Vorlesung entwickelte Theorie für Gebiets- und Volumenintegrale im Falle von nur einer Dimension auf die Substitutionsregel bei bestimmten Integralen führt.*

Test *Ist die Funktionaldeterminante des Polarkoordinatensystems überall von Null verschieden? Was kann über die Punkte gesagt werden, in denen die Funktionaldeterminante einer allgemeinen Koordinatentransformation verschwindet?*

Nicht nur bei der Koordinatentransformation von Gebiets- und Volumenintegralen tritt die Funktionalmatrix auf, sondern auch im Zusammenhang mit vielen Anwendungen, z.B. bei der mathematischen Behandlung von Robotern. Man rufe sich in Erinnerung, weshalb dies der Fall ist.

Test *Im Arbeitsbereich des Roboters, der in der Vorlesung und im Skript (Seite 38 ff) besprochen wurde, skizziere man die Koordinatenlinien der "neuen" Koordinaten ϕ und ψ . Wie äussert sich in dieser Skizze die Tatsache, dass für $\psi = 0$ und $\psi = \pi$ die Funktionaldeterminante*

$$\det \begin{vmatrix} x_\phi & x_\psi \\ y_\phi & y_\psi \end{vmatrix}$$

verschwindet.

Das Folgende ist etwas anspruchsvoller: Man konstruiere sich in Gedanken einen Roboter, der aus einem Teleskoparm (Länge r) besteht, der im Nullpunkt des Koordinatensystem angebracht ist und frei schwenkbar um die Winkel ϕ , ($0 \leq \phi \leq 2\pi$) und θ , ($0 \leq \theta \leq \pi/2$) ist. Die Grössen r , ϕ und θ entsprechen dabei den Kugelkoordinaten. Ein solcher Roboter modelliert einen Drehkran mit Teleskoparm oder ein Radargerät, das durch die Stellung seiner Parabolantenne und durch die Abstandsmessung (Laufzeit des reflektierten Signals) die Flugbahn eines Flugzeuges verfolgen kann.

Test *Wie lässt sich aus den lokal am Radargerät gemessenen Grössen die Geschwindigkeit des Flugzeuges bestimmen? (Man beachte, dass $\phi(t)$ und $\theta(t)$, und*

damit auch ihre zeitlichen Ableitungen, lokal gemessen werden können. Mit Hilfe des sogenannten Dopplereffekts lässt sich ferner auch $\dot{r}(t)$ lokal bestimmen.)

**Irrtümer haben ihren Wert;
nicht immer, aber hie und da:
nicht jeder, der nach Indien fährt,
entdeckt Amerika!**

Erich Kästner