

## 1 Funktionen von zwei Variablen

Wir betrachten in diesem Abschnitt Funktionen  $f$ , die auf einem Teilbereich  $A$  der Ebene  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  definiert sind und Werte in  $\mathbb{R}$  annehmen

$$f : (x, y) \rightarrow f(x, y), \quad D(f) = A \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} .$$

Man nennt dann  $f$  eine **Funktion der zwei Variablen  $x$  und  $y$**  (siehe Figur 1). Wir erinnern daran, dass  $A$  *Definitionsbereich*  $D(f)$  von  $f$  und dass die Menge der reellen Zahlen, die unter  $f$  als Werte auftreten, *Wertebereich*  $W(f)$  von  $f$  heisst.

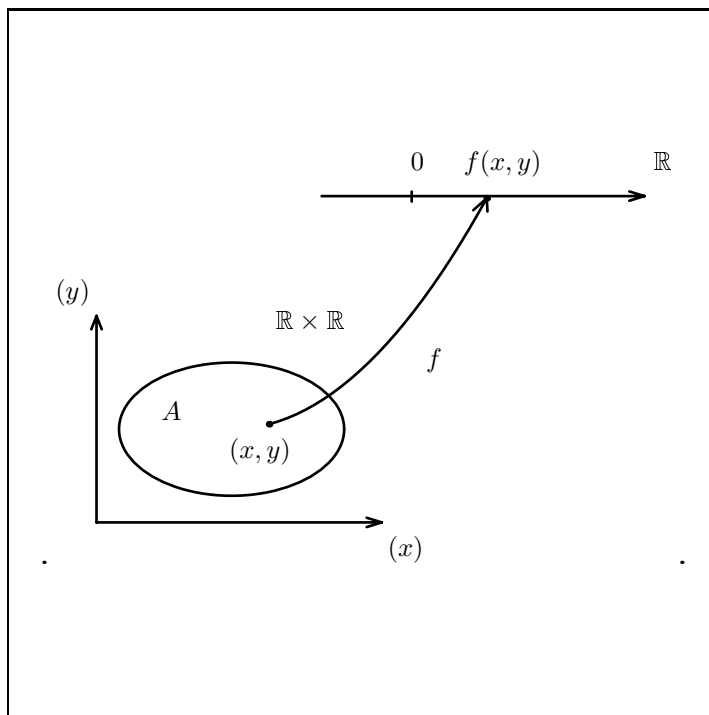


FIG. 1 :  
Funktion von zwei Variablen

Bereits früher haben wir gesehen, wo Funktionen mehrerer Variablen auf natürliche Weise auftreten. Im vorliegenden Kapitel geht es im wesentlichen darum, die Methoden der Differentialrechnung auf solche Funktionen anzuwenden.

**Beispiel** Sind reelle Zahlen  $a, b, c$  gegeben, so heisst die Funktion

$$f : (x, y) \rightarrow f(x, y) = ax + by + c, \quad D(f) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

*linear.* Für  $(a, b) \neq (0, 0)$  besteht der Wertebereich  $W(f)$  offenbar aus allen reellen Zahlen.

**Beispiel** Die Funktion

$$g : (x, y) \rightarrow g(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$$

besitzt als (grösstmöglichen) Definitionsbereich den Einheitskreis

$$D(g) = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Der Wertebereich  $W(g)$  ist offenbar das Intervall  $[0, 1]$ .

Zur Veranschaulichung einer Funktion  $f : (x, y) \rightarrow f(x, y)$  von zwei Variablen ist der **Graph**  $\Gamma(f)$  von  $f$  nützlich; es ist dies die Teilmenge des dreidimensionalen Raumes, welche durch

$$\Gamma(f) = \{(x, y, z) | (x, y) \in D(f), z = f(x, y)\}$$

gegeben ist.

**Beispiel** Der Graph der linearen Funktion  $f : (x, y) \rightarrow ax + by + c$  ist die durch die Gleichung  $z = ax + by + c$  beschriebene Ebene (siehe Figur 2). Der Graph der Funktion  $g : (x, y) \rightarrow \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$  ist die über dem Einheitskreis liegende Halbkugeloberfläche  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  (siehe Figur 3).

Der Graph einer Funktion von zwei Variablen ist definitionsgemäss eine (i.a. gekrümmte) Fläche im dreidimensionalen Raum. Er lässt sich mit den üblichen Darstellungsmitteln veranschaulichen, die für die Abbildung von Objekten im dreidimensionalen Raum entwickelt worden sind. Sehr nützlich sind in diesem Zusammenhang Darstellungsmittel der Kartographie, welche die über (bzw. unter) der  $(x, y)$ -Ebene liegende Fläche  $\Gamma(f)$  durch Niveaulinien (Höhenlinien, Isobaren, etc.) beschreiben.

Die **Niveaulinie** von  $f$  zum Niveau  $C$  ist diejenige Kurve in der  $(x, y)$ -Ebene, auf der die Funktion  $f$  überall den Wert  $C$  annimmt. Als Kurve in der  $(x, y)$ -Ebene ist sie gegeben durch die Gleichung  $f(x, y) = C$ .

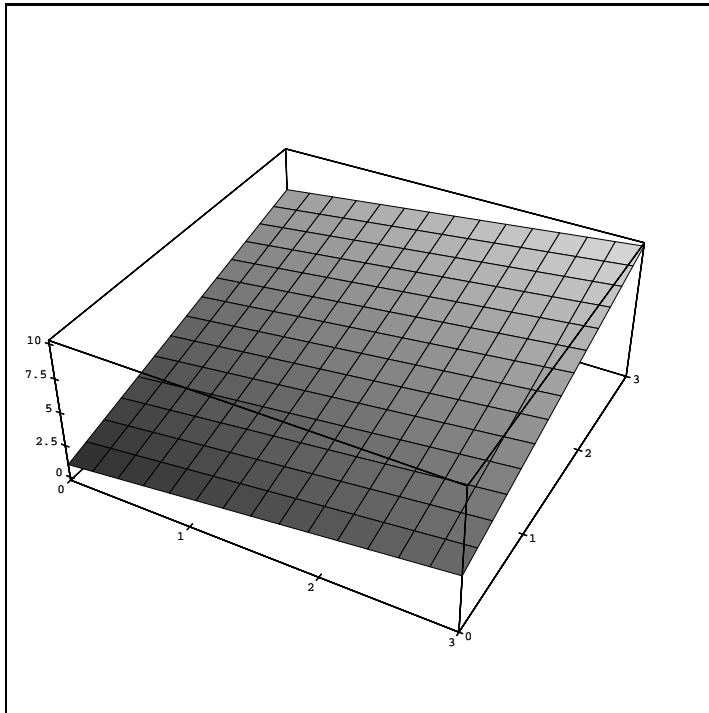


FIG. 2:  
Graph einer linearen Funktion

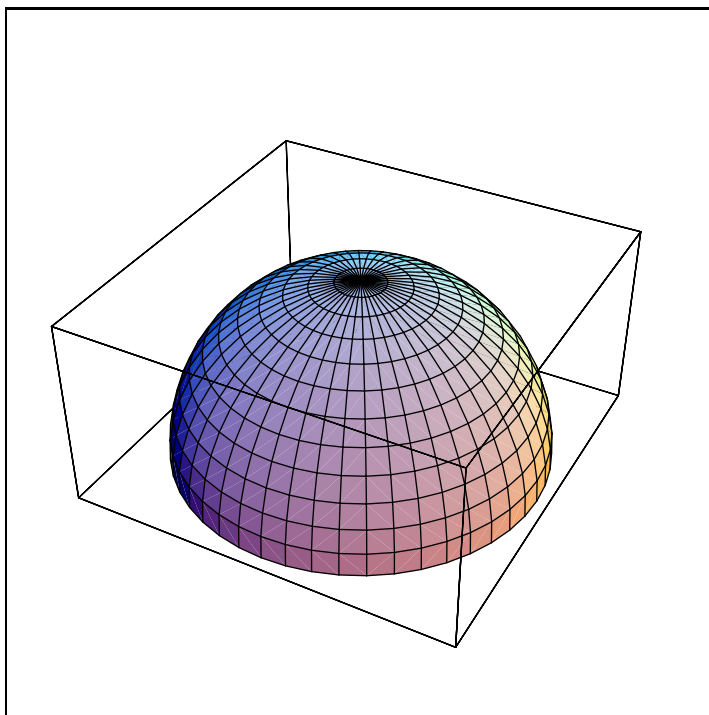


FIG. 3:  
Graph der Funktion  
 $g(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$

**Beispiel** Die Niveaulinie zum Niveau  $C$  der Funktion

$$f : (x, y) \rightarrow f(x, y) = x^2 - y^2$$

ist gegeben durch die Gleichung

$$x^2 - y^2 = C .$$

Für  $C = 0$  ist dies das Geradenpaar der Winkelhalbierenden des Koordinatensystems der  $(x, y)$ -Ebene. Für  $C > 0$  besteht die Kurve aus zwei Hyperbelästen, welche die  $x$ -Achse schneiden. Für  $C < 0$  besteht die Kurve aus zwei Hyperbelästen, welche die  $y$ -Achse schneiden. Jeder Kartenleser erkennt am Bild dieser Niveaulinien das Aussehen des Geländes, d.h. des Graphen von  $f$ : es ist ein "Passübergang" mit dem Nullpunkt des Koordinatensystems als "Passhöhe"; die  $y$ -Achse beschreibt eine über den "Pass" führende "Strasse" (siehe Figuren 4, 5).

**Beispiel** Der Graph der Funktion  $f : (x, y) \rightarrow x^2 + y^2$  ist ein über der  $(x, y)$ -Ebene liegendes Paraboloid (siehe Figur 6). Die Niveaulinien sind Kreise um den Ursprung der  $(x, y)$ -Koordinatenebene (siehe Figur 7).

**Beispiel** Die Zustandsgleichung eines idealen Gases liefert die absolute Temperatur  $T$  als Funktion des Druckes  $p$  und des Volumens  $V$

$$T : (p, V) \rightarrow T(p, V) = \frac{1}{R} pV, \quad 0 \leq p, \quad V < \infty .$$

Die Niveaulinien zum Niveau  $C$  dieser Funktion ist durch die Gleichung

$$\frac{1}{R} pV = C$$

gegeben. Offenbar ist jede Niveaulinie ein Hyperbelast im ersten Quadranten der  $(p, V)$ -Ebene. Da auf diesen Niveaulinien die Temperatur konstant ist, nennt man sie in der Physik *Isothermen*.

**Beispiel** Auch kompliziertere Funktionen, wie etwa die auf der ganzen  $(x, y)$ -Ebene definierte Funktion

$$h : (x, y) \rightarrow h(x, y) = \sin x \sin y$$

lassen sich mit Hilfe der Niveaulinien gut veranschaulichen (siehe Figuren 8, 9).

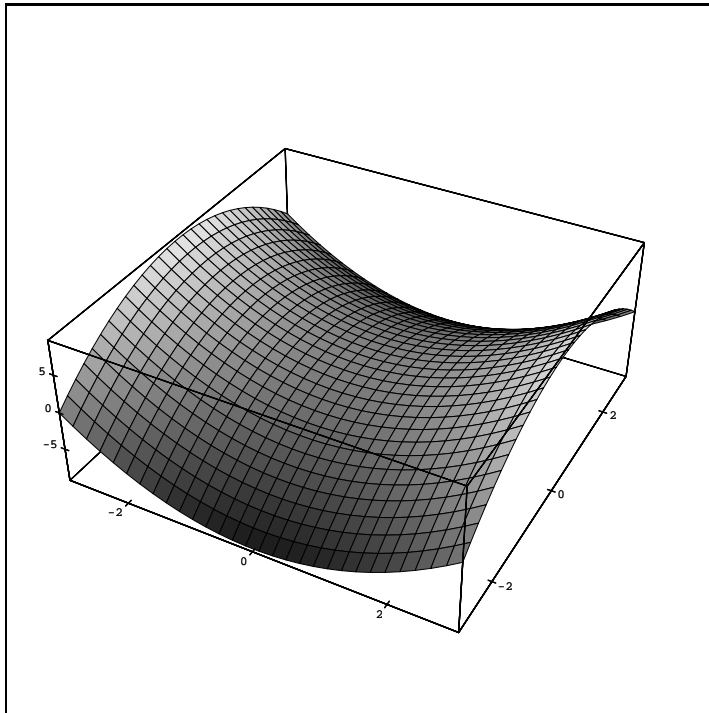


FIG. 4:  
Graph der Funktion  
 $f : (x, y) \rightarrow f(x, y) = x^2 - y^2$

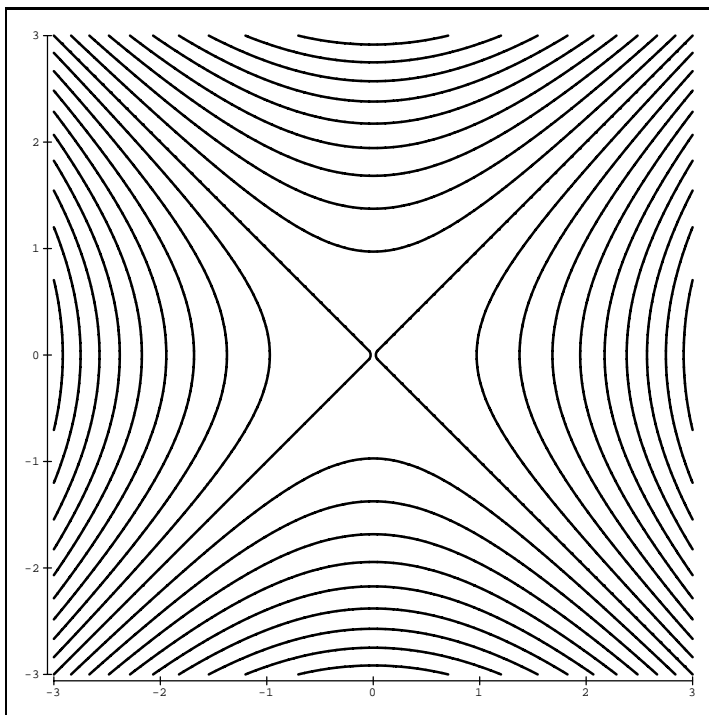


FIG. 5:  
Niveaulinien der Funktion  
 $f : (x, y) \rightarrow f(x, y) = x^2 - y^2$

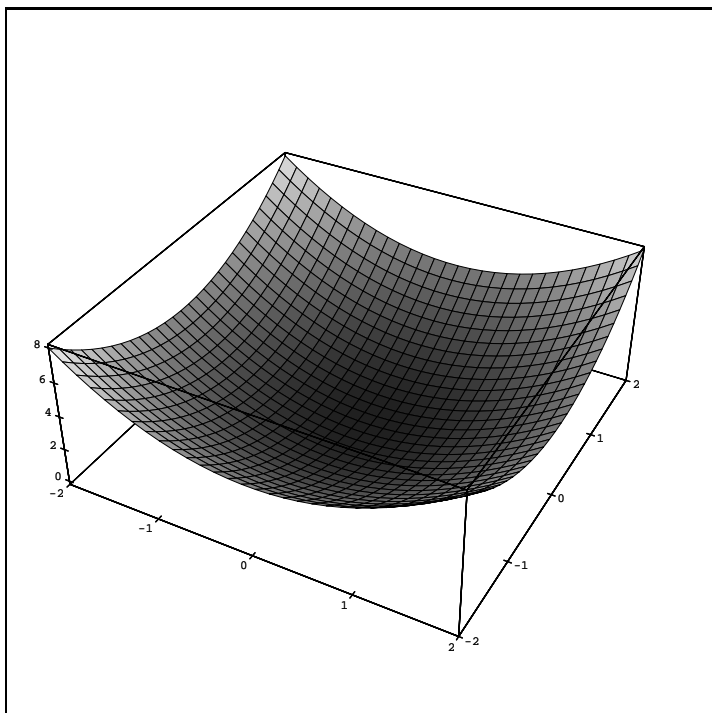


FIG. 6:  
Graph der Funktion  
 $f : (x, y) \rightarrow x^2 + y^2$

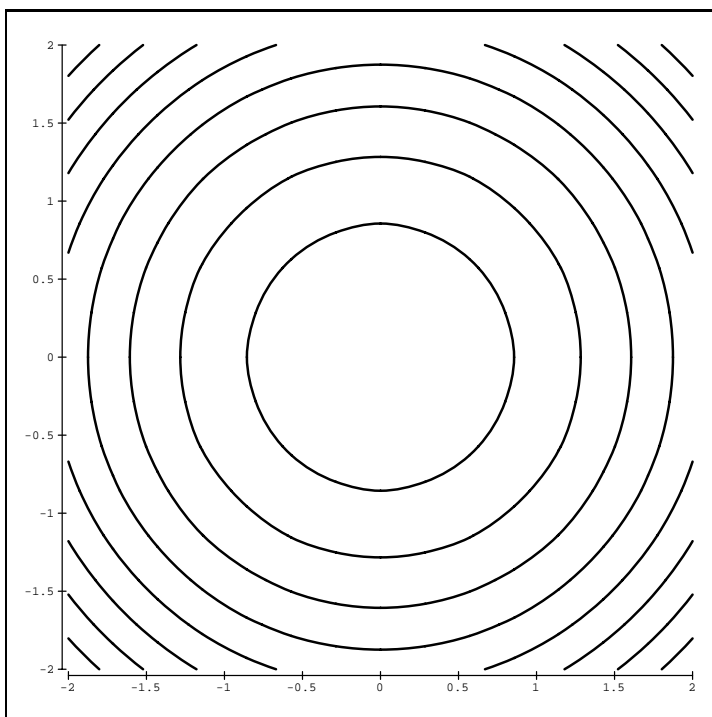


FIG. 7:  
Niveaulinien der Funktion  
 $f : (x, y) \rightarrow x^2 + y^2$

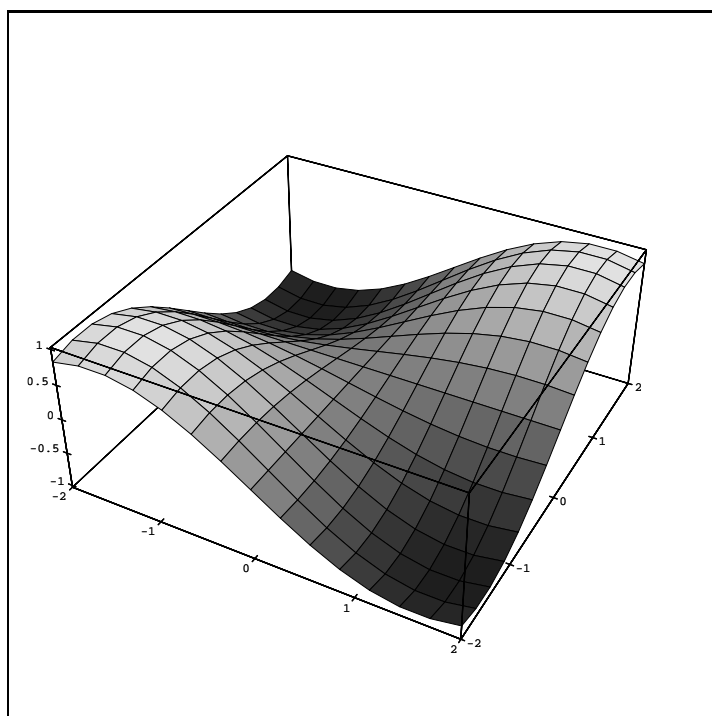


FIG. 8:  
Graph der Funktion  
 $h : (x, y) \rightarrow h(x, y) = \sin x \sin y$

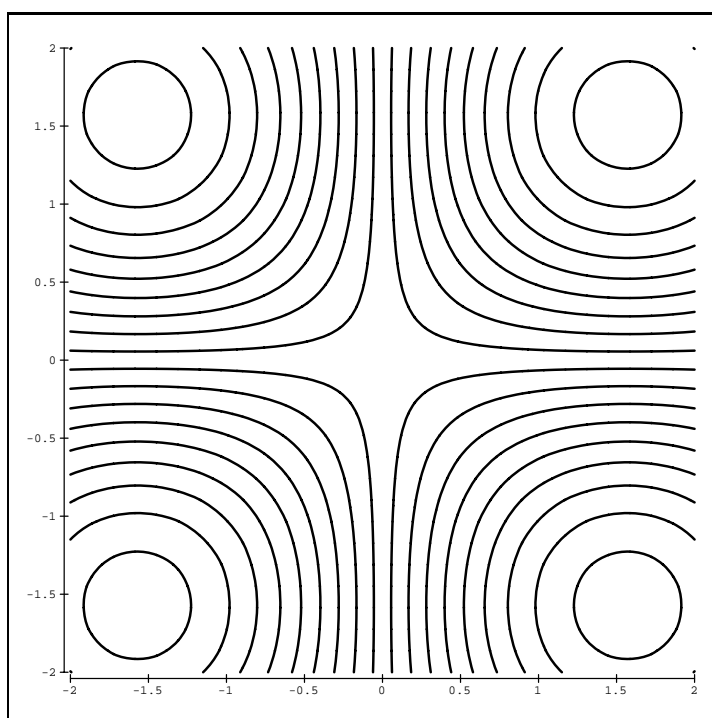


FIG. 9:  
Niveaulinien der Funktion  
 $h : (x, y) \rightarrow h(x, y) = \sin x \sin y$