

8 Koordinatentransformationen

Zur leichten mathematischen Formulierung und zur Lösung eines in der Praxis anfallenden Problems trägt oft wesentlich die richtige Wahl des Koordinatensystems bei. So wird zum Beispiel bei einem achsensymmetrischen Problem mit Vorteil ein Zylinderkoordinatensystem verwendet, bei einem kugelsymmetrischen Problem ein Kugelkoordinatensystem, etc. Da die physikalischen Gesetze in der Regel in Form von Differentialgleichungen vorliegen, in denen unter anderem auch die partiellen Ableitungen der relevanten Grössen nach den kartesischen Koordinaten vorkommen, müssen bei einem Wechsel des Koordinatensystems auch diese Ableitungen umgerechnet, d.h. in den neuen Koordinaten ausgedrückt werden. Mit diesem Problem beschäftigt sich der vorliegende Abschnitt. - Wir beginnen mit einem einfachen Beispiel in Polarkoordinaten und gehen anschliessend das Problem allgemein an.

In der (x, y) -Ebene sei die Funktion

$$F : (x, y) \rightarrow F(x, y) = x^2 - y^2$$

gegeben. Jedem Punkt der (x, y) -Ebene wird durch F eine reelle Zahl zugeordnet. Führen wir in der Ebene Polarkoordinaten ein, so ist der Funktionswert im Punkt mit Polarkoordinaten (ρ, φ) durch

$$\tilde{F}(\rho, \varphi) = F(x(\rho, \varphi), y(\rho, \varphi))$$

gegeben. Dabei gilt (siehe Figur 1)

$$\begin{aligned} x(\rho, \varphi) &= \rho \cos \varphi , \\ y(\rho, \varphi) &= \rho \sin \varphi , \end{aligned}$$

also

$$\tilde{F}(\rho, \varphi) = F(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = \rho^2(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) .$$

Die Funktionen F und \tilde{F} nehmen auf ein und denselben Punkt in der Ebene denselben Wert an; die eine drückt die Zuordnung in kartesischen die andere in Polarkoordinaten aus. Wir sagen, dass F und \tilde{F} ein und dieselbe **Punktfunktion** beschreiben.

Umgekehrt können wir die Polarkoordinaten (ρ, φ) in den kartesischen Koordinaten (x, y) ausdrücken. Es gilt bekanntlich

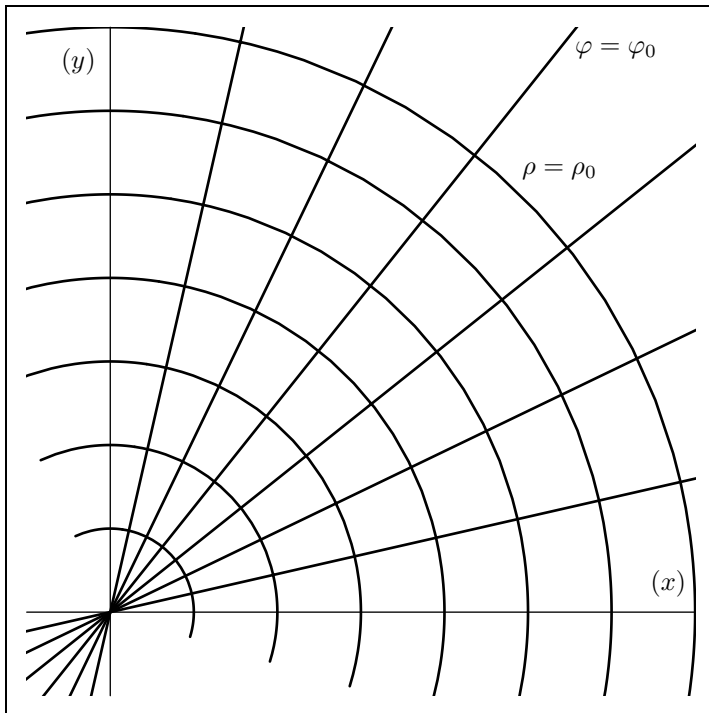


FIG. 1:
Polarkoordinatensystem

$$\begin{aligned}
 (8.3) \quad \rho(x, y) &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
 \varphi(x, y) &= \begin{cases} \arctan(y/x) & , \quad x > 0 \\ \arctan(y/x) + \pi & , \quad x < 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

(Für $x = 0$ ist die Formel für φ sinnvoll zu ergänzen!) Man hat dann

$$F(x, y) = \tilde{F}(\rho(x, y), \varphi(x, y)) = (x^2 + y^2) \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} - \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right) = x^2 - y^2 .$$

Wir wenden uns jetzt dem Problem in voller Allgemeinheit zu und betrachten neben dem kartesischen (x, y) -Koordinatensystem in der Ebene ein zweites Koordinatensystem mit Koordinaten (u, v) (siehe Figur 2). Dabei seien die x - und die y -Koordinaten des durch das Paar (u, v) beschriebenen Punktes durch die Funktionen

$$x = x(u, v) , \quad y = y(u, v)$$

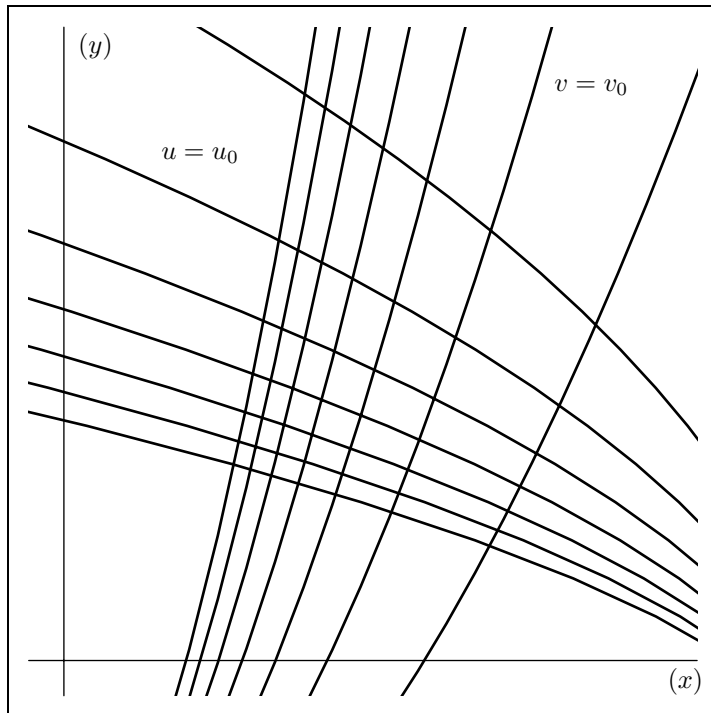


FIG. 2:
Allgemeines Koordinatensystem

gegeben. Eine in (x, y) -Koordinaten beschriebene Punktfunktion $F : (x, y) \rightarrow F(x, y)$ wird folglich in (u, v) -Koordinaten durch

$$(8.4) \quad \tilde{F}(u, v) = F(x(u, v), y(u, v))$$

ausgedrückt. Umgekehrt seien die (u, v) -Koordinaten in den kartesischen Koordinaten (x, y) durch

$$u = u(x, y) \ , \ v = v(x, y)$$

gegeben. Dann gilt analog zu (8.4)

$$(8.5) \quad F(x, y) = \tilde{F}(u(x, y), v(x, y)) \ .$$

Für die partiellen Ableitungen nach x und y ergibt sich aus der Formel (8.5) mit Hilfe der verallgemeinerten Kettenregel

$$F_x(x, y) = \tilde{F}_u(u(x, y), v(x, y)) u_x(x, y) + \tilde{F}_v(u(x, y), v(x, y)) v_x(x, y) \ ,$$

$$F_y(x, y) = \tilde{F}_u(u(x, y), v(x, y)) u_y(x, y) + \tilde{F}_v(u(x, y), v(x, y)) v_y(x, y) .$$

Die zweiten partiellen Ableitungen lauten dann (in abgekürzter Schreibweise, d.h. ohne die Argumente der Funktionen explizit hinzuschreiben)

$$\begin{aligned}
 F_{xx} &= (\tilde{F}_u u_x + \tilde{F}_v v_x)_x \\
 &= \tilde{F}_{uu} u_x^2 + \tilde{F}_{uv} u_x v_x + \tilde{F}_u u_{xx} + \tilde{F}_{vu} v_x u_x + \tilde{F}_{vv} v_x^2 + \tilde{F}_v v_{xx} \\
 (8.6) \quad F_{xy} &= (\tilde{F}_u u_x + \tilde{F}_v v_x)_y \\
 &= \tilde{F}_{uu} u_x u_y + \tilde{F}_{uv} u_x v_y + \tilde{F}_u u_{xy} + \tilde{F}_{vu} v_x u_y + \tilde{F}_{vv} v_x v_y + \tilde{F}_v v_{xy} \\
 F_{yy} &= (\tilde{F}_u u_y + \tilde{F}_v v_y)_y \\
 &= \tilde{F}_{uu} u_y^2 + \tilde{F}_{uv} u_y v_y + \tilde{F}_u u_{yy} + \tilde{F}_{vu} v_y u_y + \tilde{F}_{vv} v_y^2 + \tilde{F}_v v_{yy}
 \end{aligned}$$

Auf analoge Weise lassen sich weitere partielle Ableitungen berechnen. Dabei werden die Ausdrücke mit wachsender Ordnung der Ableitung offensichtlich rasch sehr kompliziert. Statt weiter im allgemeinen Fall zu bleiben, betrachten wir nun zwei ganz konkrete Probleme.

Beispiel In zahlreichen Anwendungen (Diffusion, Wärmeleitung, Wellenausbreitung, Torsion von Stäben, elektrisches Potential, etc.) spielt der sogenannte Laplace-Operator Δ eine wichtige Rolle (P.S. Laplace 1749-1827); dieser ist für Funktionen $f : (x, y) \rightarrow f(x, y)$ durch

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$$

definiert. Wie stellt sich dieser Operator in Polarkoordinaten dar?

Nach unseren Überlegungen wird die Funktion f in Polarkoordinaten durch

$$\tilde{f}(\rho, \varphi) = f(x(\rho, \varphi), y(\rho, \varphi))$$

beschrieben. Umgekehrt gilt

$$f(x, y) = \tilde{f}(\rho(x, y), \varphi(x, y)) ,$$

wobei $\rho(x, y)$ und $\varphi(x, y)$ durch (8.3) gegeben sind. Nun liefert die Formel (8.6)

$$\begin{aligned}
 (8.7) \quad f_{xx} + f_{yy} &= \tilde{f}_{\rho\rho}(\rho_x^2 + \rho_y^2) + \tilde{f}_{\rho\varphi}(\rho_x \varphi_x + \rho_y \varphi_y) + \\
 &\quad + \tilde{f}_{\varphi\rho}(\rho_x \varphi_x + \rho_y \varphi_y) + \tilde{f}_{\varphi\varphi}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) + \tilde{f}_\varphi(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) .
 \end{aligned}$$

Aus (8.3) folgt

$$\begin{aligned}
 \rho_x &= \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2)^{1/2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \varphi \\
 \rho_y &= \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2)^{1/2} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin \varphi \\
 \varphi_x &= \frac{\partial}{\partial x} \arctan (y/x) = \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{-\sin \varphi}{\rho} \\
 \varphi_y &= \frac{\partial}{\partial y} \arctan (y/x) = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos \varphi}{\rho} \\
 \rho_{xx} &= (\rho_x)_x = -\sin \varphi \varphi_x = \frac{\sin^2 \varphi}{\rho} \\
 \rho_{yy} &= (\rho_y)_y = \cos \varphi \varphi_y = \frac{\cos^2 \varphi}{\rho} \\
 \varphi_{xx} &= (\varphi_x)_x = \frac{-(\cos \varphi \varphi_x \rho - \sin \varphi \rho_x)}{\rho^2} = \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{\rho^2} \\
 \varphi_{yy} &= (\varphi_y)_y = \frac{-\sin \varphi \varphi_y \rho - \cos \varphi \rho_y}{\rho^2} = \frac{-2 \sin \varphi \cos \varphi}{\rho^2} .
 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \rho_x^2 + \rho_y^2 &= 1 \\
 \rho_x \varphi_x + \rho_y \varphi_y &= 0 \\
 \rho_{xx} + \rho_{yy} &= 1/\rho \\
 \varphi_x^2 + \varphi_y^2 &= 1/\rho^2 \\
 \varphi_{xx} + \varphi_{yy} &= 0 .
 \end{aligned}$$

Einsetzen in (8.6) liefert die Form des Laplace-Operators in Polarkoordinaten, indem für die durch f bzw. \tilde{f} gegebene Punktfunktion die Identität

$$\Delta f \equiv f_{xx} + f_{yy} \equiv \tilde{f}_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} \tilde{f}_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} \tilde{f}_{\varphi\varphi}$$

gilt.

In konkreten Fällen sind neben den üblichen Koordinatensystemen oft auch ganz andere von grossem Nutzen. Wir betrachten dazu das folgende Beispiel.

Beispiel Die Funktion $f : (x, t) \rightarrow f(x, t)$ beschreibe eine vom der x -Koordinate und der Zeit t abhängige physikalische Grösse. Sie erfülle die (partielle) Differentialgleichung

$$(8.8) \quad f_{tt} = c^2 f_{xx} ,$$

wobei $c > 0$ eine reelle Zahl bezeichnet. Die Differentialgleichung (8.8) heisst (eindimensionale) **Wellengleichung**. Sie heisst so, weil sie bei der mathematischen Behandlung von jeder Art von Wellen (Wasserwellen, Schallwellen, elektromagnetische Wellen (also Licht!), etc.) auftritt. Ihre Lösungen beschreiben einen Ausbreitungsvorgang. Dies weisen wir wie folgt nach: Wir führen in der (x, t) -Ebene neue Koordinaten (u, v) ein, indem wir

$$u = x + ct , \quad v = x - ct$$

setzen, oder äquivalent

$$x = \frac{u+v}{2} , \quad t = \frac{u-v}{2c}$$

(siehe Figur 3). Beschreiben f und \tilde{f} dieselbe Punktfunktion, so gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} \tilde{f}(u, v) &= f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}\right) \\ f(x, t) &= \tilde{f}(x+ct, x-ct) . \end{aligned}$$

Berechnet man die nach unserer Formel (8.6) relevanten Ausdrücke, so erhält man wegen

$$u_x = 1 , \quad u_t = c , \quad v_x = 1 , \quad v_t = -c$$

sofort

$$\begin{aligned} f_x &= \tilde{f}_u u_x + \tilde{f}_v v_x \\ &= \tilde{f}_u + \tilde{f}_v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \tilde{f}_{uu} u_x + \tilde{f}_{uv} v_x + \tilde{f}_{vu} u_x + \tilde{f}_{vv} v_x \\ &= \tilde{f}_{uu} + 2\tilde{f}_{uv} + \tilde{f}_{vv} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_t &= \tilde{f}_u u_t + \tilde{f}_v v_t \\ &= c (\tilde{f}_u - \tilde{f}_v) \end{aligned}$$

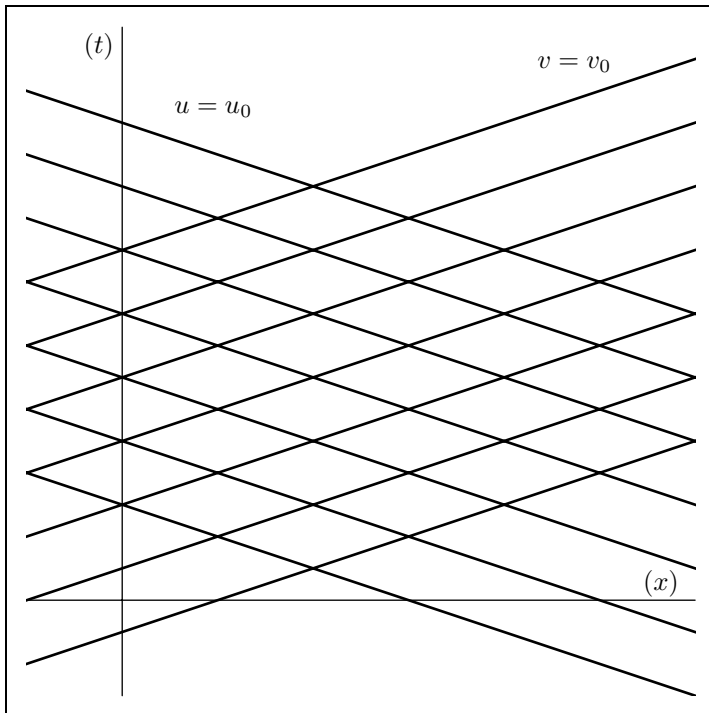


FIG. 3:
Neues Koordinatensystem für
die Wellengleichung

$$\begin{aligned} f_{tt} &= c (\tilde{f}_{uu} u_t + \tilde{f}_{uv} v_t - \tilde{f}_{vu} u_t - \tilde{f}_{vv} v_t) \\ &= c^2 (\tilde{f}_{uu} - 2\tilde{f}_{uv} + \tilde{f}_{vv}) . \end{aligned}$$

Die Wellengleichung stellt sich deshalb in den neuen Koordinaten durch

$$c^2 (\tilde{f}_{uu} - 2\tilde{f}_{uv} + \tilde{f}_{vv}) = c^2 (\tilde{f}_{uu} + 2\tilde{f}_{uv} + \tilde{f}_{vv})$$

dar, also durch die sehr einfache partielle Differentialgleichung

$$(8.9) \quad \tilde{f}_{uv} = 0 .$$

Die Lösungen der Differentialgleichung (8.9) lassen sich nach Abschnitt 2 sofort angeben. Es gilt

$$\tilde{f}(u, v) = F(u) + G(v) ,$$

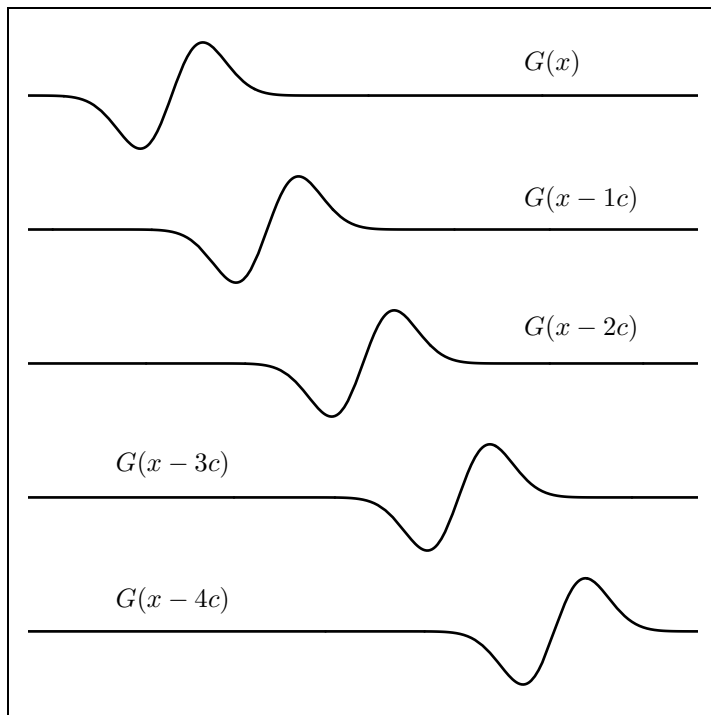


FIG. 4:
Nach rechts fortschreitende
Störung für $t = 0, 1, 2, 3, 4$

wobei $F : u \rightarrow F(u)$ und $G : v \rightarrow G(v)$ zwei beliebige differenzierbare Funktionen sind. Geht man wieder zu den ursprünglichen Koordinaten (x, t) zurück, so erhält man

$$f(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct) .$$

Der erste der hier auftretenden Summanden kann als eine mit Schnelligkeit c nach links fortschreitende Störung der durch f beschriebenen Grösse interpretiert werden und der zweite als eine mit der gleichen Schnelligkeit nach rechts fortschreitende Störung (siehe Figur 4). Was wir hier beschrieben haben, ist die sogenannte d'Alembert'sche Methode zur Lösung der Wellengleichung (J.B. d'Alembert 1717-1783).