

3 Der Satz von Schwarz, die Integrabilitätsbedingung

Wenn man die expliziten Beispiele des vorigen Abschnittes noch einmal durchsieht, so stellt man fest, dass die “gemischten Ableitungen” $f_{xy}(x, y)$ und $f_{yx}(x, y)$ in allen Fällen übereinstimmen. Dies gilt in der Tat unter ganz allgemeinen Bedingungen, wie der Satz von Schwarz besagt (H. A. Schwarz 1843-1921).

Satz *Es sei $f : (x, y) \rightarrow f(x, y)$ eine Funktion von zwei Variablen und (x_0, y_0) ein Punkt des Definitionsbereiches $D(f)$. Ferner seien f_{xy}, f_{yx} in der ganzen Umgebung von (x_0, y_0) stetig. Dann gilt*

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0) .$$

Bevor wir diesen Satz beweisen, machen wir die folgenden Bemerkungen.

Zuerst zu den Voraussetzungen des Satzes. Wir nennen die Funktion $f : (x, y) \rightarrow f(x, y)$ stetig in (x_0, y_0) , wenn sie die folgende Eigenschaft besitzt: Für jede Folge von Punkten

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$$

in der (x, y) -Ebene mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$$

gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = f(x_0, y_0) .$$

Ist die Funktion f stetig in allen Punkten ihres Definitionsbereiches, so heisst f stetig schlechthin. Diese Definition ist offensichtlich ganz analog zur Definition der Stetigkeit bei Funktionen einer Variablen (siehe Kapitel I, Abschnitt 3). Der Leser tut gut daran, sich die damaligen Ausführungen wieder in Erinnerung zu rufen.

Ohne näher auf diesen Punkt einzugehen, fügen wir noch Folgendes an. Ist f stetig in (x_0, y_0) , so ist selbstverständlich die Funktion *einer* Variablen $x \rightarrow f(x, y_0)$ stetig in x_0 und die Funktion $y \rightarrow f(x_0, y)$ stetig in y_0 . Die Umkehrung gilt allerdings nicht: Es gibt Beispiele von Funktionen f von zwei Variablen, für welche die zugehörigen Funktionen *einer* Variablen stetig sind, die Funktion f selbst aber nicht stetig ist.

Im Satz von Schwarz kann auf die Voraussetzung über Stetigkeit der partiellen Ableitungen f_{xy}, f_{yx} nicht verzichtet werden. Bei Funktionen f , welche diese Voraussetzungen nicht erfüllen, können die “gemischten Ableitungen” f_{xy} und f_{yx} durchaus verschieden sein.

Aus dem Satz von Schwarz folgt sofort, dass es (unter geeigneten Voraussetzungen über die Stetigkeit) bei höheren Ableitungen nicht auf die Reihenfolge der Ableitung ankommt. Es gilt zum Beispiel

$$f_{xyyxyx} \equiv f_{xxxyyy} , \quad f_{xxy} \equiv f_{xyx} \equiv f_{yxx} , \quad f_{xyy} \equiv f_{yxy} \equiv f_{yyx} .$$

Es gibt also bei weitem nicht so viele verschiedene höhere Ableitungen einer Funktion f , wie es auf den ersten Blick den Anschein macht.

Beweis des Satzes Wir betrachten das Quadrat in $D(f)$ mit den Eckpunkten

$$(x_0, y_0), (x_0 + h, y_0), (x_0, y_0 + h), (x_0 + h, y_0 + h)$$

(siehe Figur 1) und bilden die Hilfsgrösse

$$A(h) = f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0 + h, y_0) - [f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)] .$$

Für die Funktion (einer Variablen)

$$\varphi : x \rightarrow f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)$$

gilt dann

$$A(h) = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) .$$

Mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung (siehe Kapitel II, Abschnitt 3) können wir diese Differenz anders schreiben: es existiert ein ξ_1 zwischen x_0 und $x_0 + h$ mit

$$A(h) = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = h \varphi'(\xi_1) = h(f_x(\xi_1, y_0 + h) - f_x(\xi_1, y_0)) .$$

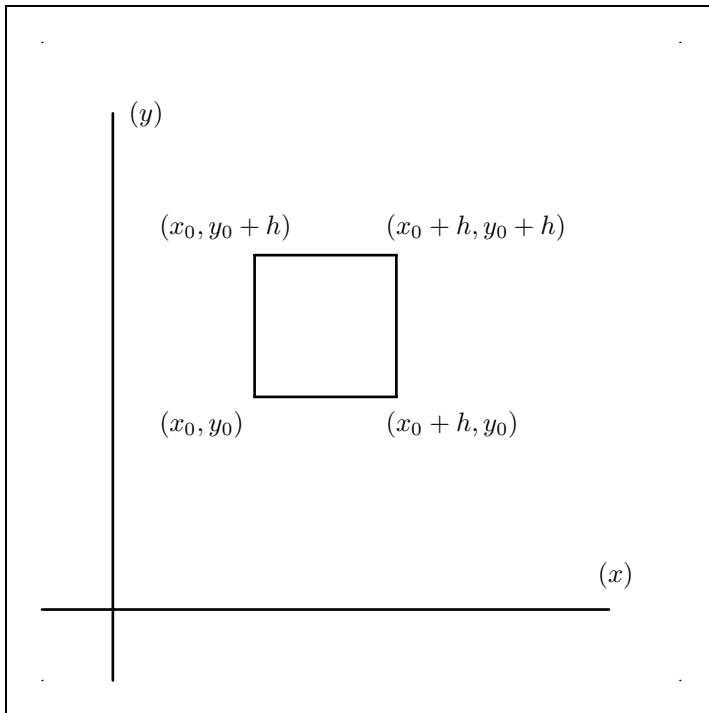


FIG. 1 :
Zum Beweis des Satzes
von Schwarz

Wiederum nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung existiert ein η_1 zwischen y_0 und $y_0 + h$ mit der Eigenschaft

$$f_x(\xi_1, y_0 + h) - f_x(\xi_1, y_0) = h f_{xy}(\xi_1, \eta_1) .$$

Damit folgt

$$A(h) = h^2 f_{xy}(\xi_1, \eta_1) ,$$

wo (ξ_1, η_1) ein Punkt im betrachteten Quadrat ist. Schreibt man

$$A(h) = f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0, y_0 + h) - [f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)] ,$$

so liefert eine analoge Überlegung einen Punkt (ξ_2, η_2) im betrachteten Quadrat mit

$$A(h) = h^2 f_{yx}(\xi_2, \eta_2) .$$

Lässt man jetzt h gegen Null gehen, so müssen die Punkte (ξ_1, η_1) und (ξ_2, η_2) gegen den Punkt (x_0, y_0) streben. Wegen der Stetigkeit von f_{xy} bzw. f_{yx} in (x_0, y_0) folgt dann

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(h)}{h^2} = f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0) .$$

Diese letztere Gleichung war zu beweisen.

Zum Schluss dieses Abschnittes gehen wir noch auf das *Umkehrproblem* ein: Gegeben seien zwei stetig differenzierbare Funktionen

$$\varphi : (x, y) \rightarrow \varphi(x, y) \text{ und } \psi : (x, y) \rightarrow \psi(x, y)$$

mit gemeinsamem Definitionsbereich $D(\varphi) = D(\psi)$. Gesucht ist eine Funktion $f : (x, y) \rightarrow f(x, y)$ mit

$$f_x(x, y) \equiv \varphi(x, y); \quad f_y(x, y) \equiv \psi(x, y).$$

Für Funktionen *einer* Variablen lautet das analoge Problem wie folgt: Gegeben ist eine Funktion $\varphi : x \rightarrow \varphi(x)$. Gesucht ist eine Funktion $f : x \rightarrow f(x)$ mit $f'(x) \equiv \varphi(x)$. Wir wissen, dass dieses letztere Problem für beliebige stetige Funktionen eine Lösung hat: f ist einfach eine Stammfunktion von φ .

Im Problem für Funktionen von *zwei* Variablen gibt es *nicht* immer eine Lösung! Nach dem Satz von Schwarz folgt nämlich aus der Existenz von f sofort die Beziehung

$$(3.1) \quad \varphi_y(x, y) \equiv f_{xy}(x, y) \equiv f_{yx}(x, y) \equiv \psi_x(x, y).$$

Für Funktionen φ und ψ , welche diese Beziehung *nicht* erfüllen, kann es somit kein f der verlangten Art geben.

Der folgende Satz, den wir ohne Beweis zitieren, besagt, dass die Bedingung (3.1) für die Existenz von f hinreichend ist, wenigstens dann, wenn der gemeinsame Definitionsbereich ein achsenparalleles Rechteck ist. Wir nennen die Bedingung (3.1) deshalb **Integrabilitätsbedingung**.

Satz *Es seien φ und ψ zwei stetige differenzierbare Funktionen zweier Variablen mit einem achsenparallelen Rechteck als Definitionsbereich. Gilt $\varphi_y(x, y) \equiv \psi_x(x, y)$, so existiert eine Funktion $f : (x, y) \rightarrow f(x, y)$ mit $f_x(x, y) \equiv \varphi(x, y)$ und $f_y(x, y) \equiv \psi(x, y)$.*

Die Funktion f ist bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt; ist nämlich f^* eine zweite Funktion der verlangten Art, so gilt für die Differenz $g(x, y) = f^*(x, y) - f(x, y)$ natürlich

$$\begin{aligned} g_x(x, y) &= f_x^*(x, y) - f_x(x, y) = \varphi(x, y) - \varphi(x, y) = 0, \\ g_y(x, y) &= f_y^*(x, y) - f_y(x, y) = \psi(x, y) - \psi(x, y) = 0. \end{aligned}$$

Wie wir aber gesehen haben, ist eine Funktion mit trivialen partiellen Ableitungen eine Konstante, d.h. $g(x, y) \equiv C$. Daraus folgt

$$f^*(x, y) \equiv f(x, y) + C.$$

Dies war zu beweisen.

Wir schliessen diesen Abschnitt mit einigen Beispielen, die zeigen, wie man die Funktion f aus φ und ψ berechnen kann, falls die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist.

Beispiel Es seien φ und ψ durch $\varphi(x, y) = x^3 + xy^2$ und $\psi(x, y) = x^2y + y^3$ gegeben. Die Integrabilitätsbedingung ist wegen

$$\varphi_y(x, y) = 2xy = \psi_x(x, y)$$

erfüllt. Ausserdem sind φ und ψ auf der ganzen (x, y) -Ebene definiert, also auf einem achsenparallelen "Rechteck". Nach unserem Satz existiert eine (bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmte) Funktion f mit $f_x = \varphi$, $f_y = \psi$. Aus

$$f_x(x, y) = x^3 + xy^2$$

folgt

$$f(x, y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{x^2y^2}{2} + v(y),$$

wo $v : y \rightarrow v(y)$ eine noch näher zu bestimmende Funktion von y ist. Aus der Bedingung

$$f_y(x, y) = x^2y + y^3$$

folgt die Beziehung

$$x^2 y + v'(y) \stackrel{!}{=} x^2 y + y^3 ,$$

so dass

$$\begin{aligned} v'(y) &\equiv y^3 , \\ v(y) &\equiv \frac{y^4}{4} + C . \end{aligned}$$

Die Funktion $f(x, y)$ hat somit die folgende Form:

$$f(x, y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{1}{4}y^4 + C.$$

Beispiel Es seien φ und ψ gegeben durch

$$\varphi(x, y) = x \sin y , \quad \psi(x, y) = \frac{x^2}{2} \cos y + y^2 ,$$

welche auf der ganzen Ebene definiert sind. Wegen

$$\varphi_y(x, y) = x \cos y = \psi_x(x, y)$$

ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt. Die Gleichung $f_x(x, y) = x \sin y$ liefert

$$f(x, y) = \frac{x^2}{2} \sin y + v(y),$$

wobei gelten muss

$$f_y(x, y) = \frac{x^2}{2} \cos y + v'(y) \stackrel{!}{=} \frac{x^2}{2} \cos y + y^2 = \psi(x, y).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}v'(y) &= y^2, \\v(y) &= \frac{y^3}{3} + C.\end{aligned}$$

Die gesuchte Funktion f ist somit von der Form

$$f(x, y) = \frac{x^2}{2} \sin y + \frac{y^3}{3} + C.$$

Wir werden später mehrmals wieder auf dieses Umkehrproblem der partiellen Ableitung geführt werden: es tritt in vielen verschiedenen Zusammenhängen auf ganz natürliche Art auf.