

## 2 Partielle Ableitungen

Man stelle sich den Graphen  $\Gamma(f)$  der Funktion  $f : (x, y) \rightarrow f(x, y)$  als “Gelände” über der  $(x, y)$ -Ebene vor (beschrieben etwa durch die Niveaulinien). Ferner stelle man sich vor, dass ein Wanderer in diesem Gelände einem Weg folgt, der in der  $(x, y)$ -Ebene durch die Parallele  $y = y_0$  zur  $x$ -Achse beschrieben wird. Von eminenter Wichtigkeit für unseren Wanderer ist die Frage nach der Steigung des Weges.

Wir erhalten diese Steigung, indem wir uns ein “Profil” des Weges in einem  $(x, z)$ -Koordinatensystem zeichnen. Es ist dies offenbar der Graph der Funktion (der einzigen Variablen  $x$ )

$$\varphi : x \rightarrow z = f(x, y_0) .$$

Die gesuchte Steigung (an der Stelle  $(x_0, y_0)$ ) ist dann die Ableitung von  $\varphi$  nach  $x$  (an der Stelle  $x_0$ ). Diese Grösse heisst **partielle Ableitung** von  $f : (x, y) \rightarrow f(x, y)$  nach  $x$  an der Stelle  $(x_0, y_0)$ . Man bezeichnet sie durch das Symbol

$$f_x(x_0, y_0) \quad \text{oder} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) .$$

Formal ist sie als Grenzwert

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

definiert. In analoger Weise erhält man die *partielle Ableitung*  $f_y$  von  $f$  nach  $y$ .

Sowohl die partielle Ableitung  $f_x$  von  $f$  nach  $x$ , wie die partielle Ableitung  $f_y$  von  $f$  nach  $y$  sind offensichtlich wieder Funktionen der zwei Variablen  $x$  und  $y$ . Sie können also ihrerseits partiell abgeleitet werden. Man erhält so die *zweiten* partiellen Ableitungen

$$f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy} ,$$

wobei wir, wie allgemein üblich,  $f_{xx} = (f_x)_x$ ,  $f_{xy} = (f_x)_y$ ,  $f_{yx} = (f_y)_x$ ,  $f_{yy} = (f_y)_y$  gesetzt haben. Diese sind, falls sie existieren, wiederum Funktionen von zwei Variablen. Ihre nochmalige partielle Ableitung liefert die *dritten* partiellen Ableitungen

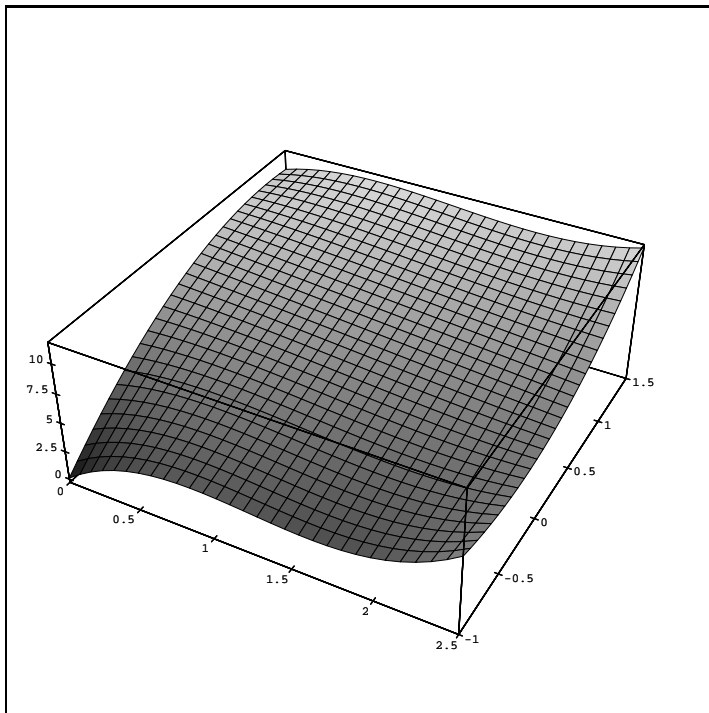


FIG. 1:  
Graph der Funktion  $f$   
 $0 \leq x \leq 2.5$ ,  $-1 \leq y \leq 1.5$

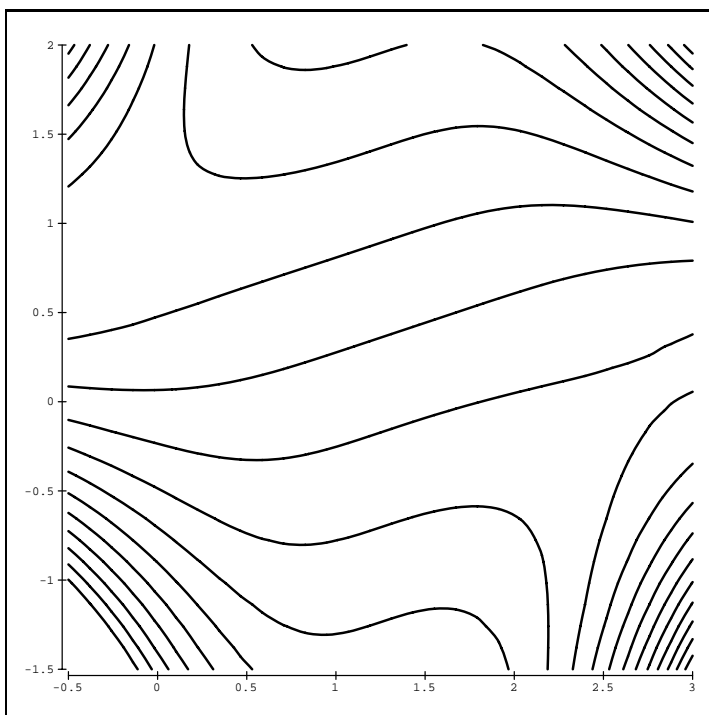


FIG. 2:  
Niveaulinien der Funktion  $f$   
 $-0.5 \leq x \leq 3$ ,  $-1.5 \leq y \leq 2$

$$f_{xxx}, f_{xxy}, f_{xyx}, f_{yxx}, f_{xyy}, f_{yyx}, f_{yyy},$$

und auf analoge Weise erhält man die partiellen Ableitungen beliebiger Ordnung.

**Beispiel** Es sei die Funktion

$$f : (x, y) \rightarrow \left(x - \frac{5}{4}\right)^3 \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - x + 3y + \frac{15}{2}$$

gegeben (siehe Figuren 1, 2). Für  $y = -1$  erhält man die Funktion einer Variablen (siehe Figur 3)

$$\varphi : x \rightarrow \left(x - \frac{5}{4}\right)^3 \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - x + \frac{9}{2} = \frac{9}{4} \left(x - \frac{5}{4}\right)^3 - x + \frac{9}{2}.$$

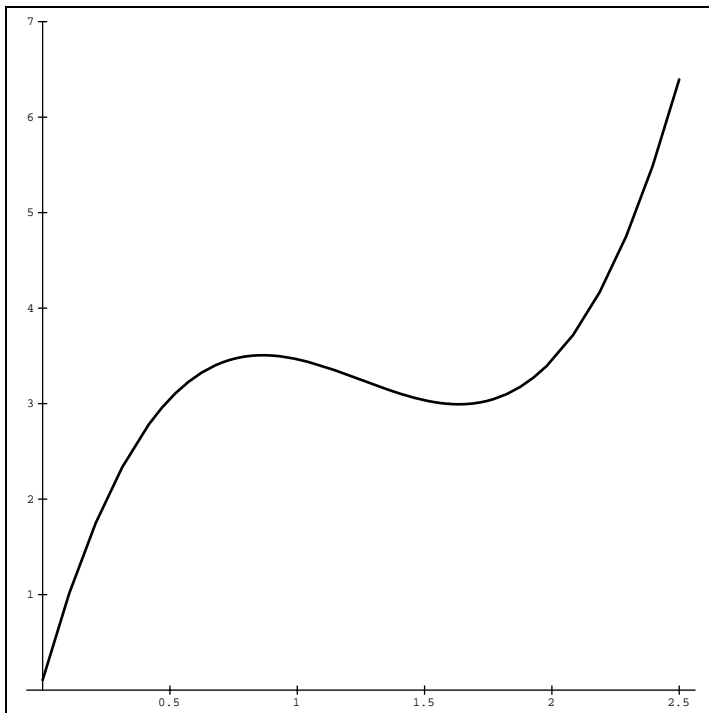


FIG. 3:  
Verhalten von  $f$  auf  $y = -1$

Deren Ableitung in  $x = 1$  ist definitionsgemäss die partielle Ableitung  $f_x(1, -1)$ ; man erhält  $f_x(1, -1) = -0.578\dots$

**Beispiel** Es sei die Funktion

$$f : (x, y) \rightarrow f(x, y) = e^{x^2+2y}$$

gegeben (siehe Figuren 4, 5). Die partiellen Ableitungen sind (siehe Figuren 6, 7, 8, 9)

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2x e^{x^2+2y} , \\ f_y(x, y) &= 2 e^{x^2+2y} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= (2 + (2x)^2) e^{x^2+2y} , \\ f_{xy}(x, y) &= 4x e^{x^2+2y} , \\ f_{yx}(x, y) &= 4x e^{x^2+2y} , \\ f_{yy}(x, y) &= 4 e^{x^2+2y} . \end{aligned}$$

**Beispiel** Es sei die Funktion

$$f : (x, y) \rightarrow f(x, y) = \arctan \left( \frac{y}{x} \right)$$

gegeben. Die partiellen Ableitungen  $f_x, f_y$  ergeben sich zu

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= -\frac{1}{1 + (y^2/x^2)} \frac{y}{x^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2} , \\ f_y(x, y) &= \frac{1}{1 + (y^2/x^2)} \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2} . \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir die zweiten partielle Ableitungen

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) = (f_x)_x(x, y) &= \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} , \\ f_{xy}(x, y) = (f_x)_y(x, y) &= -\frac{(x^2 + y^2) - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} , \\ f_{yx}(x, y) = (f_y)_x(x, y) &= \frac{(x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} , \\ f_{yy}(x, y) = (f_y)_y(x, y) &= \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} . \end{aligned}$$

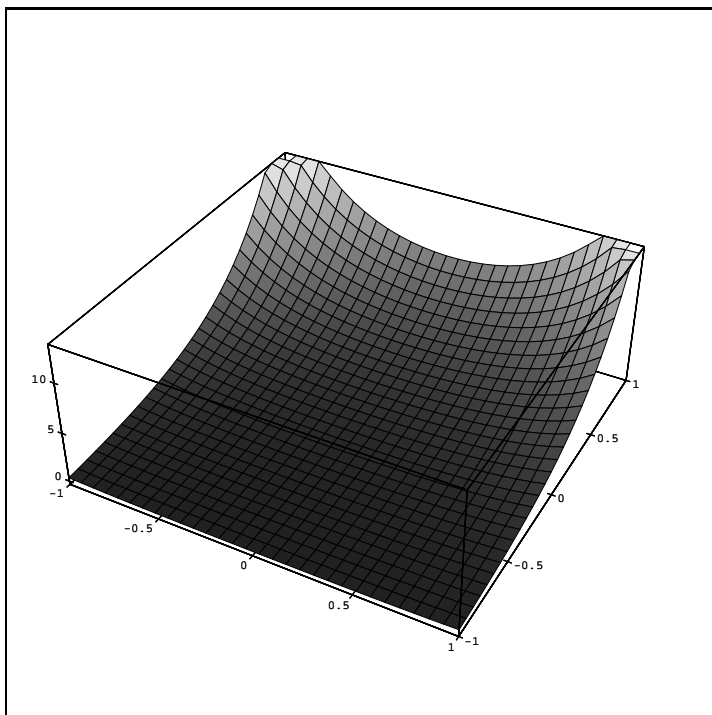


FIG. 4:  
Graph der Funktion  
 $f(x, y) = e^{x^2+2y}$

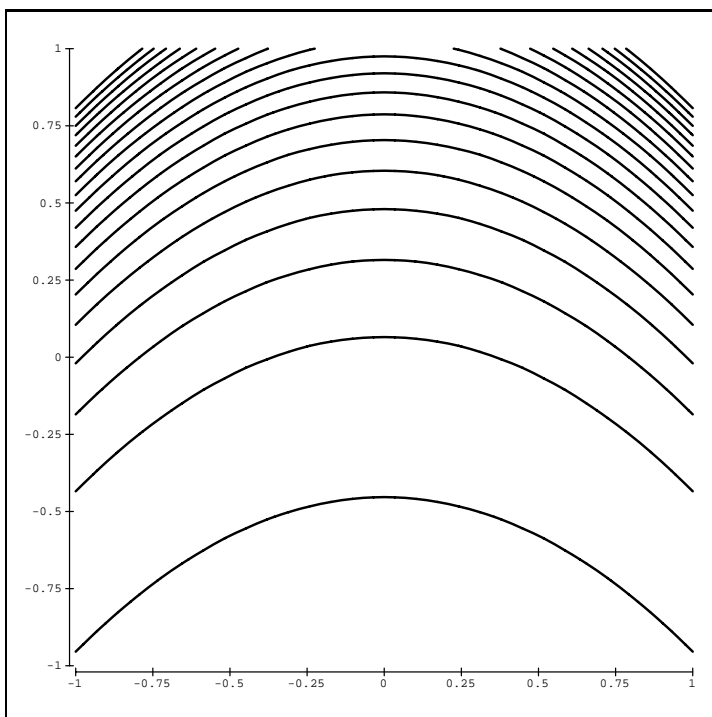


FIG. 5:  
Niveaulinien der Funktion  
 $f(x, y) = e^{x^2+2y}$

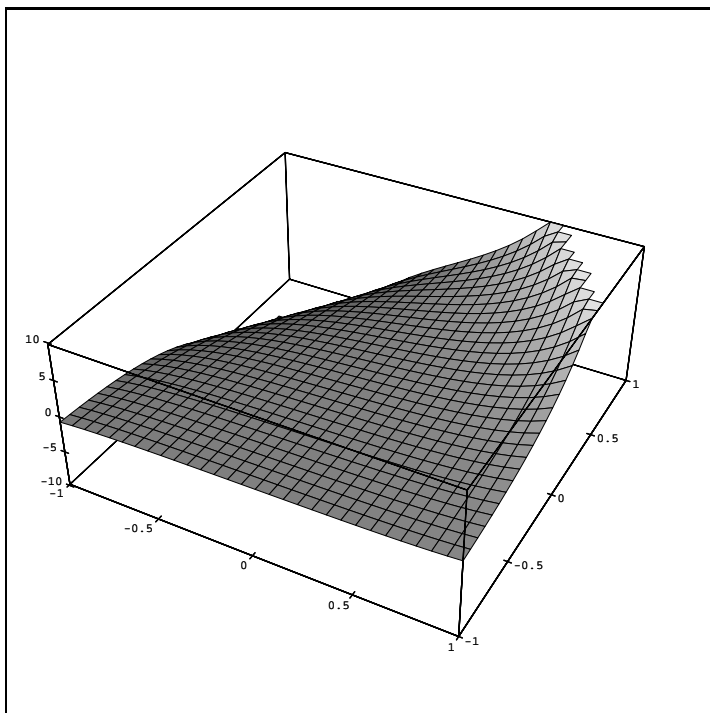


FIG. 6:  
Graph der Funktion  
 $f_x(x, y) = 2x e^{x^2+2y}$

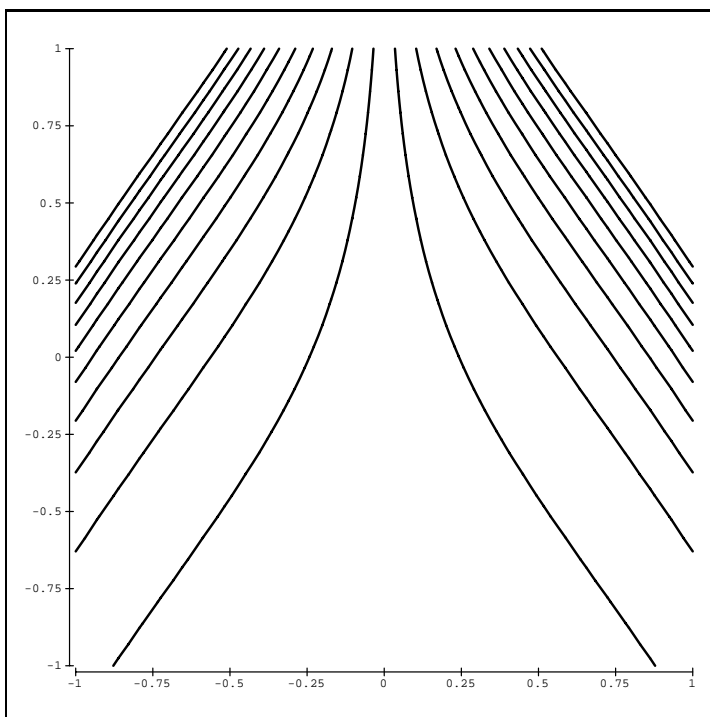


FIG. 7:  
Niveaulinien der Funktion  
 $f_x(x, y) = 2x e^{x^2+2y}$

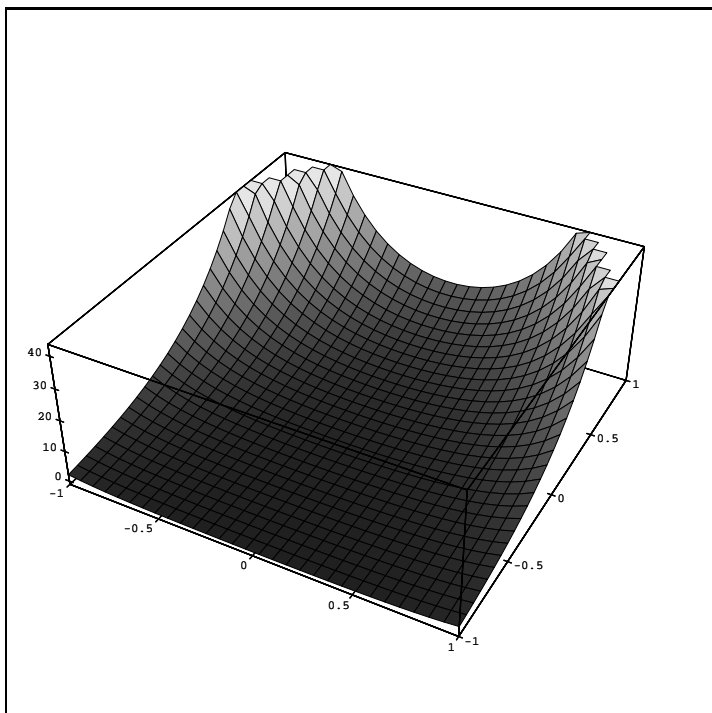


FIG. 8:  
Graph der Funktion  
 $f_{xx}(x, y) = (2 + (2x)^2) e^{x^2 + 2y}$

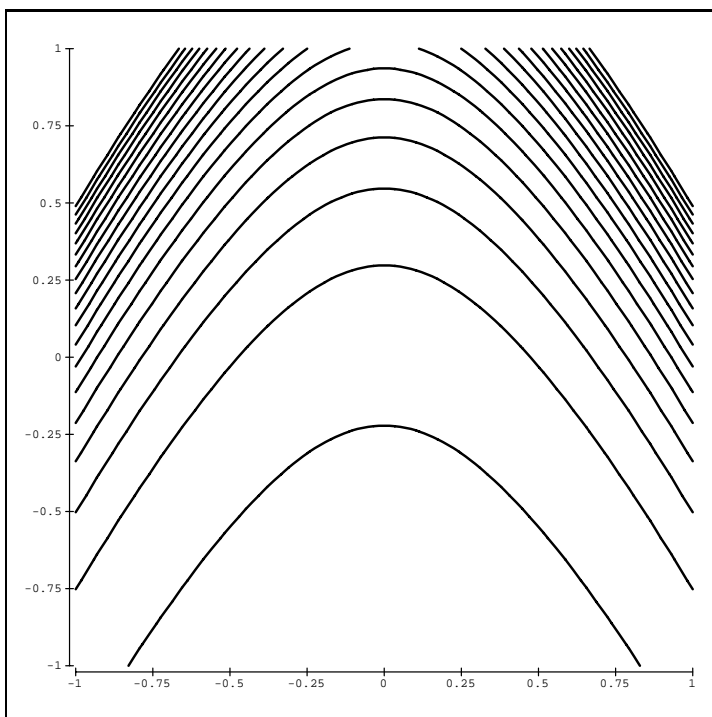


FIG. 9:  
Niveaulinien der Funktion  
 $f_{xx}(x, y) = (2 + (2x)^2) e^{x^2 + 2y}$

**Beispiel** Man bestimme alle Funktionen  $f$  von zwei Variablen mit  $f_x(x, y) \equiv 0$ .

Für die partielle Differentiation nach  $x$  ist die Funktion  $f$  eine Konstante; es gilt also

$$f(x, y) = v(y) ,$$

wobei  $v : y \rightarrow v(y)$  eine beliebige Funktion von  $y$  ist.

**Beispiel** Man bestimme alle Funktionen  $f$  mit

$$f_x(x, y) \equiv f_y(x, y) \equiv 0 .$$

Wegen  $f_x(x, y) \equiv 0$  gilt nach obigem  $f(x, y) \equiv v(y)$ . Daraus folgt

$$0 \equiv f_y(x, y) \equiv v'(y) ,$$

also  $v(y) \equiv C$ . Damit ist  $f(x, y) \equiv C$ .

**Beispiel** Gesucht sind alle Funktionen  $f$  mit

$$f_y(x, y) \equiv x^2 \sinh(xy) .$$

Offensichtlich ist

$$f(x, y) = x \cosh(xy) + u(x) ,$$

wo  $x \rightarrow u(x)$  eine beliebige Funktion von  $x$  ist.

**Beispiel** Gesucht sind alle Funktionen  $f$  mit

$$f_{xy}(x, y) \equiv 0.$$

Es folgt sofort  $f_x(x, y) \equiv u(x)$ , wo  $u : x \rightarrow u(x)$  eine Funktion von  $x$  ist. Dann ist aber

$$f(x, y) = U(x) + V(y)$$

mit  $U'(x) = u(x)$  und  $V : y \rightarrow V(y)$  eine beliebige Funktion von  $y$ .