

## 4 Linearisieren, Fehlerrechnung

Das **Linearisieren** bei Funktionen zweier Variablen ist vollkommen analog zum Linearisieren bei Funktionen einer Variablen. Ist  $f : x \rightarrow f(x)$  eine Funktion *einer* Variablen, so linearisiert man diese an der Stelle  $x_0$ , indem man sie durch diejenige *lineare* Funktion  $x \rightarrow ax + b$  ersetzt, deren Graph gerade die Tangente an den Graphen  $\Gamma(f)$  im Punkt  $(x_0, f(x_0))$  ist. Ist  $f : (x, y) \rightarrow f(x, y)$  eine Funktion zweier Variablen, so linearisiert man diese an der Stelle  $(x_0, y_0)$ , indem man sie durch diejenige *lineare* Funktion  $(x, y) \rightarrow ax + by + c$  ersetzt, deren Graph gerade die Tangentialebene an den Graphen  $\Gamma(f)$  im Punkte  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  ist. Die so bestimmte lineare Funktion nennen wir **lineare Ersatzfunktion** von  $f$  im Punkte  $(x_0, y_0)$ . Im hier zu behandelnden Fall von zwei Variablen besitzt die lineare Ersatzfunktion laut dieser Definition die folgenden Eigenschaften:

- ihr Wert in  $(x_0, y_0)$  ist  $f(x_0, y_0)$ ,
- ihre partielle Ableitung nach  $x$  ist  $f_x(x_0, y_0)$ ,
- ihre partielle Ableitung nach  $y$  ist  $f_y(x_0, y_0)$ .

Diese drei Eigenschaften bestimmen offensichtlich die lineare Ersatzfunktion von  $f$  in  $(x_0, y_0)$  vollständig. Sie ist gegeben durch

$$(x, y) \rightarrow f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) .$$

Ihr Graph ist definitionsgemäss die **Tangentialebene** an den Graphen  $\Gamma(f)$  von  $f$  im Punkt  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ; diese hat die Gleichung

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) .$$

**Beispiel** Gegeben sei die Funktion  $f : (x, y) \rightarrow x^2 - y^2$ . Gesucht ist die lineare Ersatzfunktion von  $f$  in  $(x_0, y_0) = (1, -2)$  (siehe Figuren 1, 2).

Es gilt

$$f_x(x, y) = 2x, \quad f_y(x, y) = -2y ,$$

also

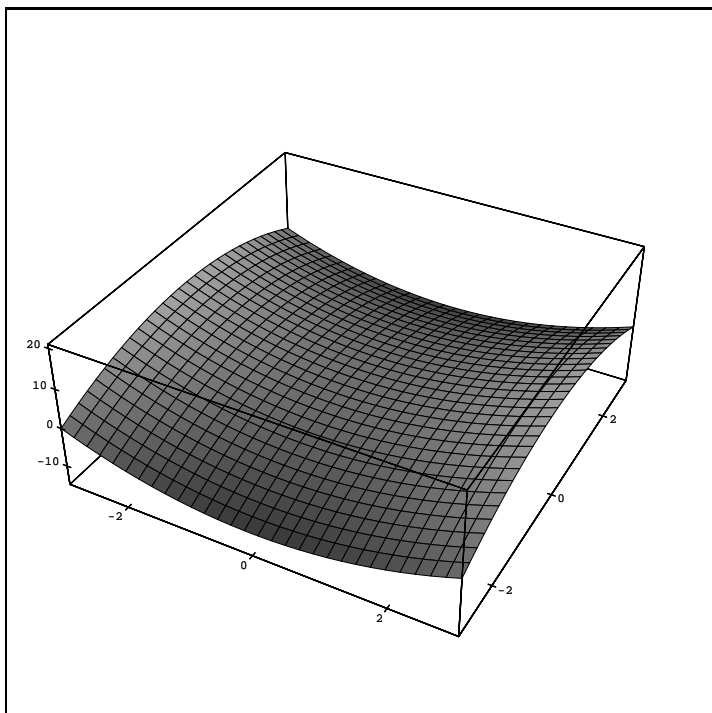


FIG. 1:  
Die Funktion  
 $f : (x, y) \rightarrow x^2 - y^2$

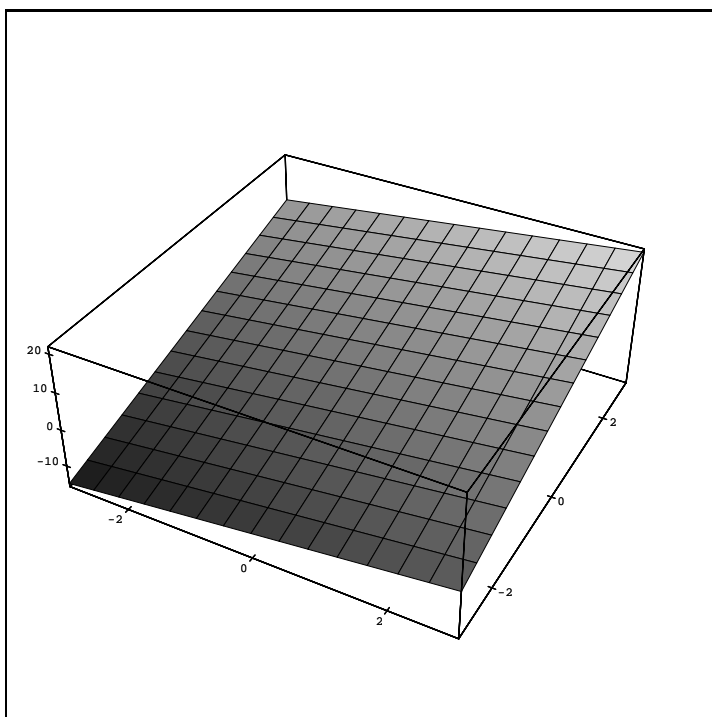


FIG. 2:  
Lineare Ersatzfunktion von  
 $f : (x, y) \rightarrow x^2 - y^2$   
im Punkte  $(1, -2)$

$$f_x(1, -2) = 2, \quad f_y(1, -2) = 4.$$

Ausserdem gilt  $f(1, -2) = -3$ . Die lineare Ersatzfunktion von  $f$  im Punkt  $(1, -2)$  ist somit

$$(x, y) \rightarrow -3 + 2(x - 1) + 4(y + 2) = 3 + 2x + 4y.$$

Im Falle von Funktionen einer Variablen ist die lineare Ersatzfunktion eine gute Approximation in der Nähe des betrachteten Punktes. Dies gilt auch für Funktionen zweier Variablen. Um das zu präzisieren, betrachten wir die Differenz  $\varphi(\Delta x, \Delta y)$  zwischen dem Funktionswert von  $f$  an der Stelle  $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$  und dem Funktionswert der linearen Ersatzfunktion von  $f$  in  $(x_0, y_0)$  an dieser Stelle  $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ , also

$$\varphi(\Delta x, \Delta y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - (f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y).$$

Dann gilt der folgende Satz

**Satz** *Es sei  $f : (x, y) \rightarrow f(x, y)$  eine stetig differenzierbare Funktion von zwei Variablen und es sei  $(x_0, y_0)$  ein Punkt des Definitionsbereiches  $D(f)$  von  $f$ . Dann gilt*

$$\lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\varphi(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0.$$

Wir können diesen Sachverhalt auch mit Hilfe des Landausymbols beschreiben: Die Differenz der Funktionswerte in  $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$  der Funktion  $f$  und der linearen Ersatzfunktion von  $f$  in  $(x_0, y_0)$  ist von kleinerer Grössenordnung als  $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ :

$$\varphi(\Delta x, \Delta y) = o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right).$$

*Beweis* Wir schreiben

$$\begin{aligned} \varphi(\Delta x, \Delta y) &= (f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)) + \\ &\quad + (f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)) - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y. \end{aligned}$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung existiert ein  $\xi$  zwischen  $x_0$  und  $x_0 + \Delta x$  und ein  $\eta$  zwischen  $y_0$  und  $y_0 + \Delta y$  mit der Eigenschaft

$$\varphi(\Delta x, \Delta y) = f_y(x_0 + \Delta x, \eta)\Delta y + f_x(\xi, y_0)\Delta x - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y .$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} &= \\ &= (f_x(\xi, y_0) - f_x(x_0, y_0)) \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} + (f_y(x_0 + \Delta x, \eta) - f_y(x_0, y_0)) \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} . \end{aligned}$$

Wenn nun  $\Delta x$  und  $\Delta y$  gegen Null streben, so streben wegen der Stetigkeit von  $f_x$  und  $f_y$  an der Stelle  $(x_0, y_0)$  beide Summanden auf der rechten Seite gegen Null. Es folgt also

$$\lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\varphi(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0 .$$

Dies war zu beweisen.

Führt man, wiederum analog zum Fall einer Funktion einer Variablen, ein parallel verschobenes Koordinatensystem mit Achsen  $dx$ ,  $dy$ ,  $df$  ein, dessen Ursprung mit dem Punkt  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  zusammenfällt, so stellt sich die lineare Ersatzfunktion von  $f$  in  $(x_0, y_0)$  durch die einfache Formel

$$df = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$$

dar. In dieser Form heisst sie üblicherweise **totales Differential** von  $f$  in  $(x_0, y_0)$ . Das obige Resultat besagt dann, dass die Änderung der Funktion  $f$ , also

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

gut durch das Differential von  $f$  in  $(x_0, y_0)$ , also durch

$$df = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$$

approximiert wird ( $dx = \Delta x$ ,  $dy = \Delta y$ ), und zwar umso besser je kleiner  $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$  ist; für die Differenz gilt nämlich

$$\Delta f - df = o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right) .$$

Wie schon bei Funktionen einer Variablen, so ist auch hier eine der Anwendungen der linearen Ersatzfunktion die **Fehlerrechnung**.

**Beispiel** Bekanntlich ist das Trägheitsmoment  $\Theta$  eines homogenen Vollzylinders mit Radius  $R$ , Höhe  $h$  und Dichte  $\rho$  um seine Achse gegeben durch

$$\Theta = \rho \frac{\pi}{2} R^4 h .$$

Die (gemessenen) Grössen  $R$  und  $h$  seien mit einer Genauigkeit von 1% bekannt. Man gebe eine Fehlerabschätzung für  $\Theta$  an.

Das totale Differential  $d\Theta$  ist eine Abschätzung für den (absoluten) Fehler  $\Delta\Theta$ :

$$\Delta\Theta \sim d\Theta = \rho \frac{\pi}{2} 4R^3 h dR + \rho \frac{\pi}{2} R^4 dh .$$

Der relative Fehler  $\Delta\Theta/\Theta$  lässt sich deshalb nach oben abschätzen durch

$$\left| \frac{\Delta\Theta}{\Theta} \right| \sim 4 \left| \frac{dR}{R} \right| + \left| \frac{dh}{h} \right| = 5\% .$$

Man beachte, dass der Fehler in  $R$  viermal stärker ins Gewicht fällt als der Fehler in  $h$ .

**Beispiel** Mit Hilfe des Archimedischen Prinzips lässt sich das (mittlere) spezifische Gewicht  $\gamma$  eines unregelmässig geformten Körpers bestimmen, indem man dessen Gewicht in Luft ( $\gamma_{\text{Luft}} \sim 0$ ) und in Wasser ( $\gamma_{\text{Wasser}} \sim 1$ ) feststellt. Es sei  $x$  das Gewicht in Luft und  $y$  das Gewicht im Wasser. Bezeichnet  $V$  das Volumen des Körpers, so gilt  $x = \gamma V$  und wegen des Archimedischen Prinzips

$$y = x - V .$$

Daraus ergibt sich

$$\gamma = \frac{x}{x-y} .$$

Mit welchem (relativen) Fehler ist  $\gamma$  höchstens behaftet, wenn  $x$  und  $y$  auf 1% genau gemessen werden. Wiederum schätzen wir den Fehler  $\Delta\gamma$  durch das totale Differential  $d\gamma$  ab:

$$\Delta\gamma \sim d\gamma = \gamma_x dx + \gamma_y dy = -\frac{y}{(x-y)^2} dx + \frac{x}{(x-y)^2} dy .$$

Daraus folgt

$$\left| \frac{\Delta\gamma}{\gamma} \right| \leq \left| \frac{y}{x-y} \right| \left| \frac{dx}{x} \right| + \left| \frac{x}{x-y} \right| \left| \frac{dy}{y} \right| = 2 \left| \frac{y}{x-y} \right| \frac{1}{100} .$$

Wegen

$$\frac{y}{x-y} = \frac{y-x+x}{x-y} = \gamma - 1$$

erhalten wir deshalb die Abschätzung

$$\left| \frac{\Delta\gamma}{\gamma} \right| \leq 2|\gamma - 1| \frac{1}{100} .$$

Die hier beschriebene Methode der Bestimmung des spezifischen Gewichtes ist also für grosse spezifische Gewichte  $\gamma$  nicht zu empfehlen.