

6 Verallgemeinerte Kettenregel

Es sei eine Funktion $f : (x, y) \rightarrow f(x, y)$ gegeben und eine in ihrem Definitionsbereich $D(f)$ verlaufende Kurve K durch die Parameterdarstellung $t \rightarrow (x(t), y(t))$. Wir betrachten die zusammengesetzte Funktion

$$t \rightarrow F(t) = f(x(t), y(t)) ,$$

welche t den Wert von f an der zu t gehörenden Stelle der Kurve K zuordnet (siehe Figuren 1, 2). Wir fragen nach der Ableitung von F nach t . Laut Definition gilt

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t)) - f(x(t), y(t))}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x(t) + \Delta x, y(t) + \Delta y) - f(x(t), y(t))}{\Delta t} , \end{aligned}$$

wobei wir

$$\begin{aligned} \Delta x &= x(t + \Delta t) - x(t) , \\ \Delta y &= y(t + \Delta t) - y(t) \end{aligned}$$

gesetzt haben. Mit den Bezeichnungen von Abschnitt 4 erhalten wir nun

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(f_x(x(t), y(t)) \frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y(x(t), y(t)) \frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\varphi(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \cdot \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta t} \right) \\ &= f_x(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + f_y(x(t), y(t)) \dot{y}(t) , \end{aligned}$$

denn es gilt nach Abschnitt 4

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0 ,$$

aber

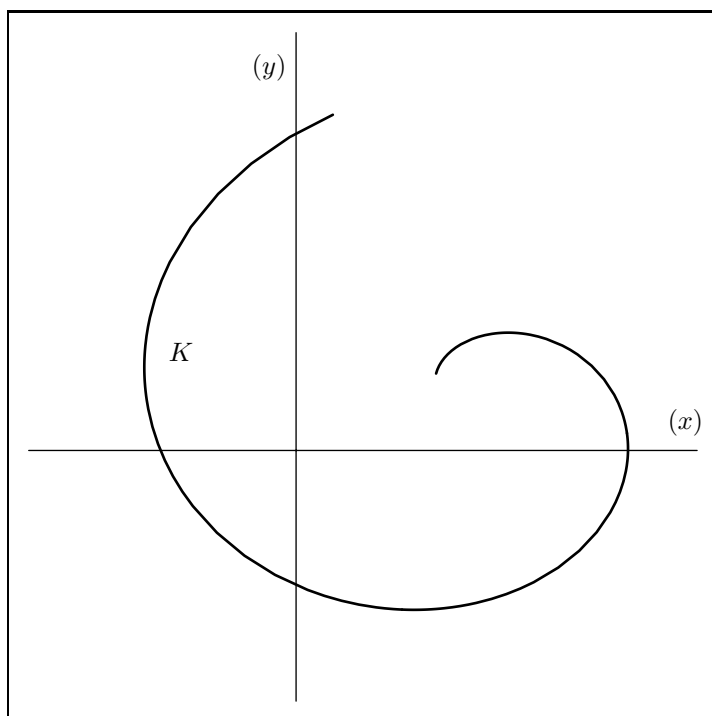


FIG. 1:
Kurve K gegeben durch
 $x : t \rightarrow 5 - \frac{3}{2} t \cos t$
 $y : t \rightarrow 1 + t \sin t$
 für $1 \leq t \leq 7.5$

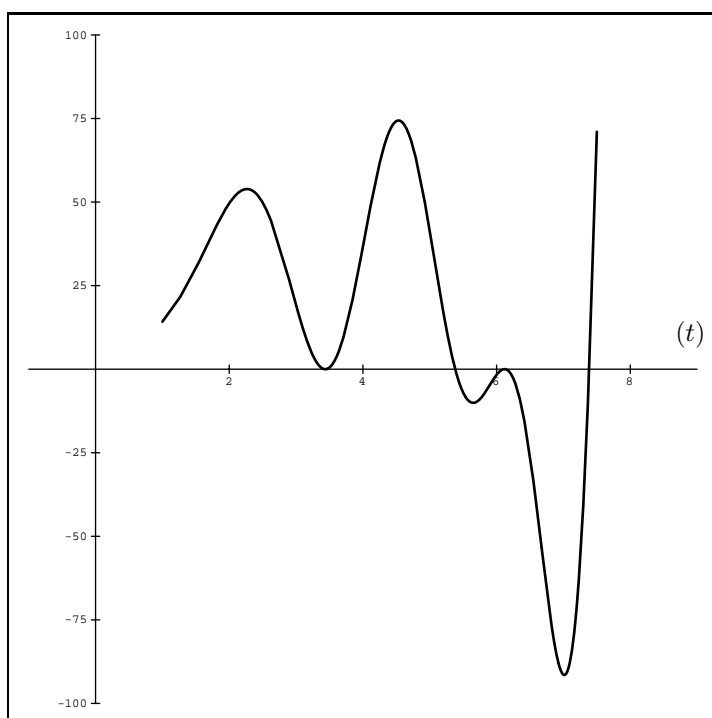


FIG. 2:
Graph der zusammen-
gesetzten Funktion
 $t \rightarrow F(t) = f(x(t), y(t))$,
 mit $f : (x, y) \rightarrow f(x, y) = xy^2$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} .$$

Damit haben wir die sogenannte **verallgemeinerte Kettenregel** bewiesen:

Satz

$$\frac{dF}{dt}(t) = \frac{df}{dt}(x(t), y(t)) = f_x(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + f_y(x(t), y(t)) \dot{y}(t) .$$

Während die gewöhnliche Kettenregel vor allem beim Ableiten von komplizierten Funktionen nützlich ist, liegen die Anwendungen der verallgemeinerten Kettenregel in einer etwas anderen Richtung. Wir illustrieren dies mit den folgenden Beispielen.

Beispiel Die Kurve K sei in impliziter Darstellung, d.h. durch eine Gleichung der Form $f(x, y) = 0$ gegeben. Es sei (x_0, y_0) ein Punkt der Kurve, also $f(x_0, y_0) = 0$. Wir fragen nach der Steigung der Kurve in (x_0, y_0) .

Um die Steigung zu berechnen, denken wir uns die Kurve in einer *kleinen Umgebung* von (x_0, y_0) in expliziter Form gegeben: sie sei dort der Graph der Funktion (einer Variablen)

$$\varphi : x \rightarrow \varphi(x) , \quad x_0 - \Delta x \leq x \leq x_0 + \Delta x .$$

Es gilt dann also

$$f(x, \varphi(x)) \equiv 0$$

für $x_0 - \Delta x \leq x \leq x_0 + \Delta x$ und die Steigung von K in (x_0, y_0) ist $\varphi'(x_0)$. Fassen wir x als Parameter auf, so erhalten wir durch Ableiten nach x mit Hilfe der verallgemeinerten Kettenregel die Beziehung

$$f_x(x, \varphi(x)) \cdot 1 + f_y(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0 .$$

Daraus ergibt sich für die Steigung $\varphi'(x_0)$ der Kurve in (x_0, y_0)

$$\varphi'(x_0) = -\frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)} .$$

Beispiel Wir betrachten noch kurz den Spezialfall, wo die Kurve K die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

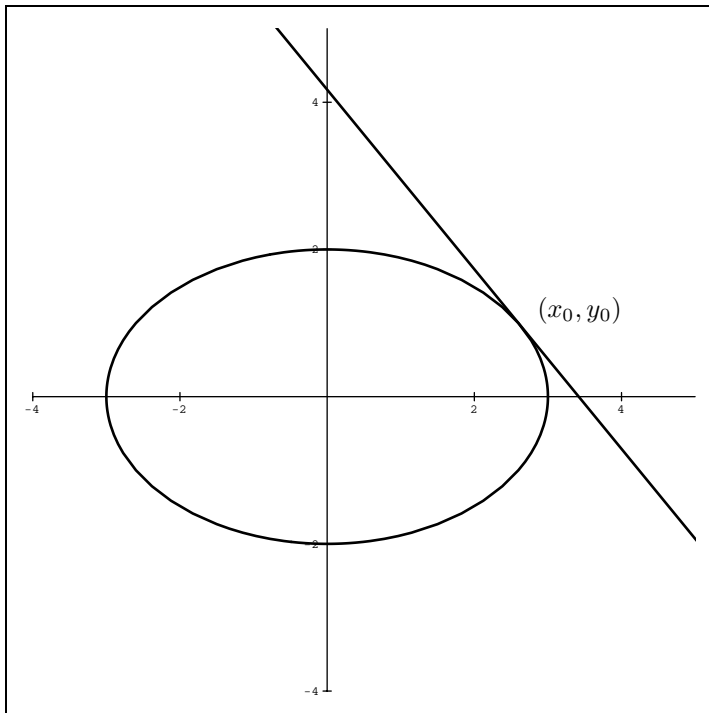


FIG. 3:
Tangente an Ellipse

ist, und fragen nach der Gleichung der Tangente im Ellipsenpunkt (x_0, y_0) (siehe Figur 3). Zu diesem Zweck betrachten wir die Ellipse als Kurve gegeben durch

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

und bestimmen zuerst die Steigung m in (x_0, y_0) . Nach obigem gilt

$$m = -\frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x_0}{y_0} .$$

Die Tangente an die Ellipse im Punkt (x_0, y_0) ist somit durch die Gleichung

$$y - y_0 = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x_0}{y_0} (x - x_0)$$

gegeben. Diese lässt sich vereinfachen zu

$$\frac{x_0(x - x_0)}{a^2} + \frac{y_0(y - y_0)}{b^2} = 0 .$$

Berücksichtigt man noch, dass (x_0, y_0) ein Punkt der Ellipse ist, und deshalb die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

erfüllt, so erhält man für die Tangente die einfache Gleichung

$$\frac{x_0}{a^2} x + \frac{y_0}{b^2} y = 1 .$$

Beispiel Der Zustand eines Gases wird durch die Grössen Druck p , Volumen V und (absolute) Temperatur T beschrieben, welche untereinander durch die sogenannte Zustandsgleichung des Gases verbunden sind. (Die einfachste solche Zustandsgleichung ist die des idealen Gases

$$pV = RT .$$

Dabei ist R die sogenannte Gaskonstante. Etwas komplizierter ist die van der Waal'sche Zustandsgleichung, welche das Verhalten realer Gase genauer beschreibt; sie lautet

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT .$$

Dabei sind die Grössen a, b vom betrachteten Gas abhängige Konstanten.) Die Zustandsgleichung sagt, dass für eine feste Menge Gas je zwei der drei Grössen p , V , T die dritte festlegen. Man hat folglich (wenigstens lokal!) Funktionen

$$\begin{aligned} p : (V, T) &\rightarrow p(V, T) \\ V : (p, T) &\rightarrow V(p, T) \\ T : (p, V) &\rightarrow T(p, V) , \end{aligned}$$

welche aus der Gaszustandsgleichung folgen. In der Physik definiert man dann den *Ausdehnungskoeffizienten* α des Gases durch

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p ,$$

den *Spannungskoeffizienten* β durch

$$\beta = \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V ,$$

und die *Kompressibilität* κ durch

$$\kappa = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T .$$

(Es ist in diesem Zusammenhang in der Physik üblich, die bei der partiellen Ableitung festgehaltenen Größen als Index hinzuschreiben; aus mathematischen Gründen wäre dies natürlich nicht notwendig!) Zwischen den Koeffizienten α , β , κ , die im allgemeinen Funktionen der Größen p , V , T sind, besteht kraft der Zustandsgleichung eine einfache Beziehung. Diese wollen wir nun herleiten. Zu diesem Zweck gehen wir von der Funktion

$$V : (p, T) \rightarrow V(p, T)$$

aus. Halten wir V konstant, $V = C$, so ist der Druck p nur von T abhängig; es sei $\tilde{p} : T \rightarrow \tilde{p}(T)$ die entsprechende Funktion. Dann gilt

$$(6.2) \quad V(\tilde{p}(T), T) \equiv C .$$

Mathematisch ausgedrückt betrachtet man eine explizite Darstellung der Niveaulinie der Funktion $V : (p, T) \rightarrow V(p, T)$ zum Niveau C . Nun ist aber offenbar

$$\frac{d\tilde{p}}{dT} = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V ,$$

so dass die Ableitung der Beziehung (6.2) nach T die Gleichung

$$0 = \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V + \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

liefert. Daraus erhalten wir laut Definition von α , β , κ unmittelbar

$$\alpha = p\kappa\beta .$$

Dies ist die gewünschte Beziehung. Man beachte, dass sie bereits aus der *Existenz* einer Zustandsgleichung hergeleitet wurde, die spezielle *Form* der Zustandsgleichung spielte dabei überhaupt keine Rolle.