

5 Extrema

Bei Funktionen einer Variablen hat die Differentialrechnung ein effizientes Verfahren geliefert, um globale Extremalstellen aufzufinden. Ähnliches gilt auch für Funktionen von zwei (oder mehr) Variablen.

Es sei $f : (x, y) \rightarrow f(x, y)$ eine auf $D(f)$ definierte Funktion. Ein Punkt (x_0, y_0) heisst **globale Maximalstelle** von f , wenn für alle $(x, y) \in D(f)$ die Ungleichung

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

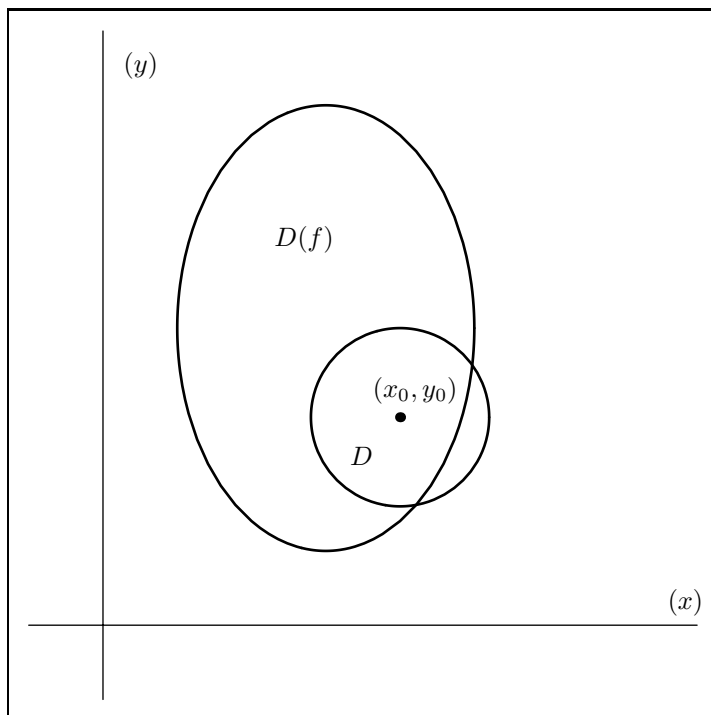


FIG. 1 :
Zur Definition eines lokalen
Extremums

erfüllt ist. Der Funktionswert $f(x_0, y_0)$ heisst **globales Maximum** von f . Der Punkt $(x_0, y_0) \in D(f)$ heisst **lokale Maximalstelle**, wenn es eine Kreisscheibe D mit Mittelpunkt (x_0, y_0) gibt, so dass für alle (x, y) , die zugleich in $D(f)$ und in D liegen, die Ungleichung

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

erfüllt ist (siehe Figur 1). Der Funktionswert $f(x_0, y_0)$ heisst in diesem Fall ein **lokales Maximum** von f . Analog ist eine **globale** bzw. **lokale Minimalstelle** und ein **globales** bzw. **lokales Minimum** definiert. Unter einer **Extremalstelle** versteht man eine Maximal- oder Minimalstelle und eine **Extremum** ist ein Maximum oder Minimum.

Beispiel Für die Funktion

$$f : (x, y) \rightarrow f(x, y) = x^2 + y^2, \quad D(f) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

ist der Punkt $(0, 0)$ eine globale Minimalstelle. Es gibt hingegen keine Maximalstelle, weder eine lokale noch eine globale.

Es gibt also Beispiele, wo Extremalstellen der einen oder anderen Art nicht existieren. Der folgende mathematische Satz garantiert allerdings in vielen Fällen die Existenz von Extremalstellen. *Ist $f : (x, y) \rightarrow f(x, y)$ eine stetige Funktion, deren Definitionsbereich $D(f)$ ein endliches abgeschlossenes (d.h. inklusive Rand) Gebiet der (x, y) -Ebene ist, so existiert für f in $D(f)$ (mindestens) eine globale Maximalstelle und (mindestens) eine globale Minimalstelle.*

Die Bestimmung der globalen Extremalstellen einer Funktion wird in erheblichem Mass durch das nachfolgende Resultat erleichtert. Es erlaubt, eine Liste von Punkten der (x, y) -Ebene aufzustellen, in der alle lokalen Extremalstellen (möglicherweise aber noch weitere Punkte) vorkommen.

Satz *Es sei $f : (x, y) \rightarrow f(x, y)$ eine in $D(f)$ definierte Funktion. Ist (x_0, y_0) eine lokale Extremalstelle von f , so ist*

- (x_0, y_0) ein Punkt des Randes von $D(f)$, **oder**
- mindestens eine der partiellen Ableitungen f_x oder f_y ist in (x_0, y_0) nicht definiert, **oder**
- die partiellen Ableitungen f_x und f_y sind in (x_0, y_0) definiert, und es gilt

$$f_x(x_0, y_0) = 0 = f_y(x_0, y_0) .$$

Wir rufen in Erinnerung (siehe Abschnitt 4), dass der Graph von f in Punkten (x_0, y_0) mit $f_x(x_0, y_0) = 0 = f_y(x_0, y_0)$ eine horizontale Tangentialebene besitzt.

Man beachte ferner (und vergleiche mit der Situation bei Funktionen von einer Variablen):

- nicht jede Extremalstelle von f ist eine gemeinsame Nullstelle von f_x und f_y ;
- nicht jede gemeinsame Nullstelle von f_x und f_y ist Extremalstelle von f .

Der *Beweis* des Satzes folgt direkt aus dem eindimensionalen Fall. Ist nämlich $(x_0, y_0) \in D(f)$ eine lokale Extremalstelle von f , so besitzt offensichtlich auch die Funktion (einer Variablen)

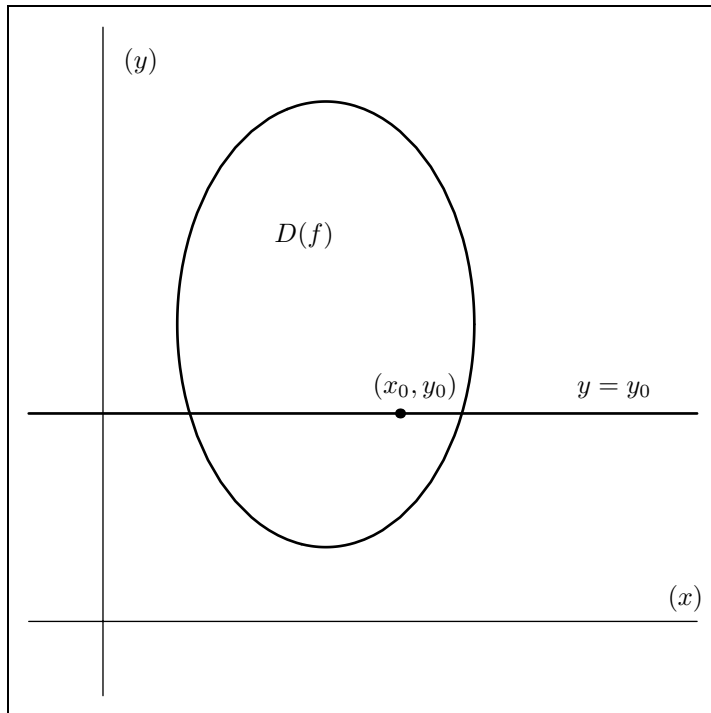


FIG. 2:
Zum Beweis des Satzes

$$\varphi : x \rightarrow \varphi(x) = f(x, y_0) , \quad (x_0, y_0) \in D(f)$$

in x_0 eine Extremalstelle (siehe Figur 2). Daraus folgt nach Kapitel II, Abschnitt 4,

- dass x_0 und damit (x_0, y_0) ein Randpunkt ist, **oder**,
- dass $\varphi'(x_0) = f_x(x_0, y_0)$ nicht definiert ist, **oder**
- dass gilt $\varphi'(x_0) = f_x(x_0, y_0) = 0$.

Da Analoges auch für die Funktion $\psi : y \rightarrow \psi(y) = f(x_0, y)$ gilt, ist der Beweis vollständig.

Beispiel Es sei eine reelle Zahl $a > 0$ gegeben. Man bestimme denjenigen Punkt P in der (x, y) -Ebene, für welchen die Summe der Abstände von der x -Achse, von der y -Achse und von der Geraden $x + y = a$ am kleinsten ist (siehe Figur 3).

Man sieht leicht, dass der Punkt P nicht ausserhalb des Dreiecks D mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, a)$ liegen kann, denn zu jedem ausserhalb von D liegenden Punkt P' lässt sich sofort ein anderer Punkt angeben, für den die Summe der Abstände kleiner wird. Für Punkte im Dreieck D ist die Summe der Abstände $f(x, y)$ gegeben durch

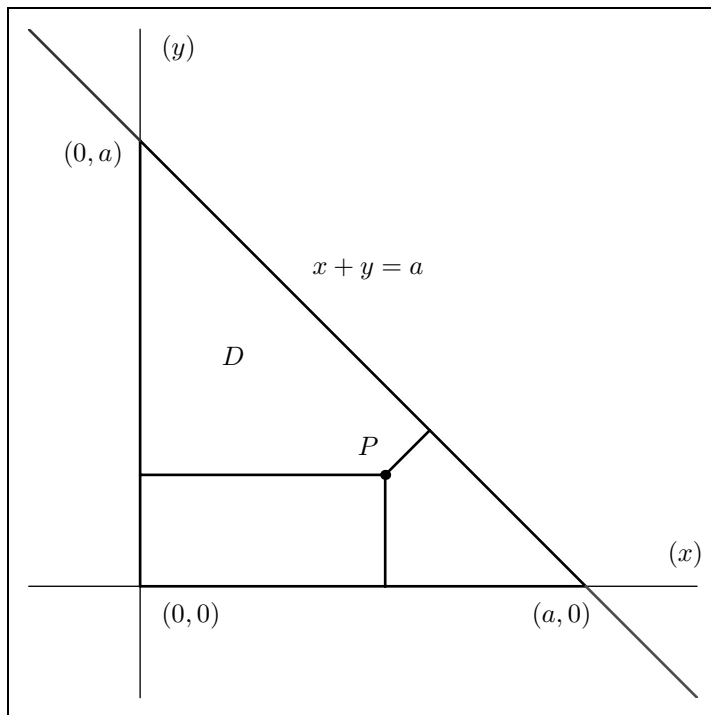


FIG. 3:
Zur Berechnung der Summe der
Abstände

$$f(x, y) = x + y + \frac{1}{\sqrt{2}} (a - x - y) .$$

Somit haben wir für die Funktion $f : (x, y) \rightarrow f(x, y)$, $D(f) = D$ die globale Minimalstelle zu suchen. Zu diesem Zweck untersuchen wir einerseits die Randpunkte des Dreiecks D und andererseits die partiellen Ableitungen von f . Für letztere gilt

$$f_x(x, y) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} , \quad f_y(x, y) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

Die partiellen Ableitungen existieren also im ganzen Definitionsbereich und besitzen dort *keine* gemeinsamen Nullstellen. Nach unserem Satz muss die globale Minimalstelle (müssen die globalen Minimalstellen) von f folglich auf dem Rand von D zu finden sein. Für die Werte von f auf den Punkten des Randes von D erhalten wir (siehe Figur 4):

$$\begin{aligned} x = 0 , \quad f(0, y) &= y + \frac{1}{\sqrt{2}} (a - y) , \quad 0 \leq y \leq a , \\ y = 0 , \quad f(x, 0) &= x + \frac{1}{\sqrt{2}} (a - x) , \quad 0 \leq x \leq a . \end{aligned}$$

Für $x + y - a = 0$ ist $f \equiv a$. Die globale Minimalstelle der Funktion f in D ist deshalb im Punkte $(0, 0)$ zu finden; das globale Minimum ist $f(0, 0) = a/\sqrt{2}$.

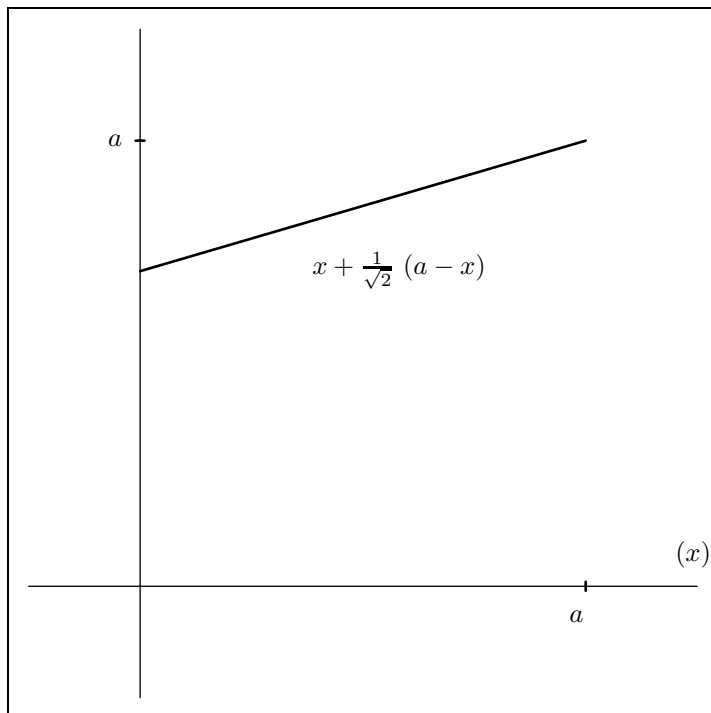


FIG. 4:
Verhalten von f auf der x -Achse

Beispiel Es sei $a < 0$ eine reelle Zahl. Man bestimme denjenigen Punkt Q in der (x, y) -Ebene, für den die Summe der Quadrate der Abstände von der x -Achse, von der y -Achse und von der Geraden $x + y - a = 0$ minimal wird.

Für den Punkt (x, y) der (x, y) -Ebene ist die Summe der Quadrate der Abstände gegeben durch

$$g(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{2} (x + y - a)^2 .$$

Es ist folglich die globale Minimalstelle der Funktion

$$g : (x, y) \rightarrow g(x, y) , \quad D(g) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

zu suchen. Da es keine Randpunkte gibt und die Funktion g überall differenzierbar ist, kommt für die sicherlich existierende globale Minimalstelle nur eine gemeinsame Nullstelle der partiellen Ableitungen g_x und g_y in Frage. Dies führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} g_x(x, y) &= 2x + x + y - a = 0 \\ g_y(x, y) &= 2y + x + y - a = 0 . \end{aligned}$$

Die (einzige) Lösung ist $x = y = a/4$. Der Punkt $Q = (a/4, a/4)$ ist somit die globale Minimalstelle von g . Das globale Minimum ist $a^2/4$.

Beispiel Gegeben ist die Funktion

$$f : (x, y) \rightarrow f(x, y) = 2x^2 + 4xy + 3y^2 - 8x - 10y + 2$$

(siehe Figur 5). Man bestimme die globale Maximalstelle von f auf dem Quadrat mit den Eckpunkten

$$A = (0, 0), \quad B = (2, 0), \quad C = (0, 2), \quad D = (2, 2).$$

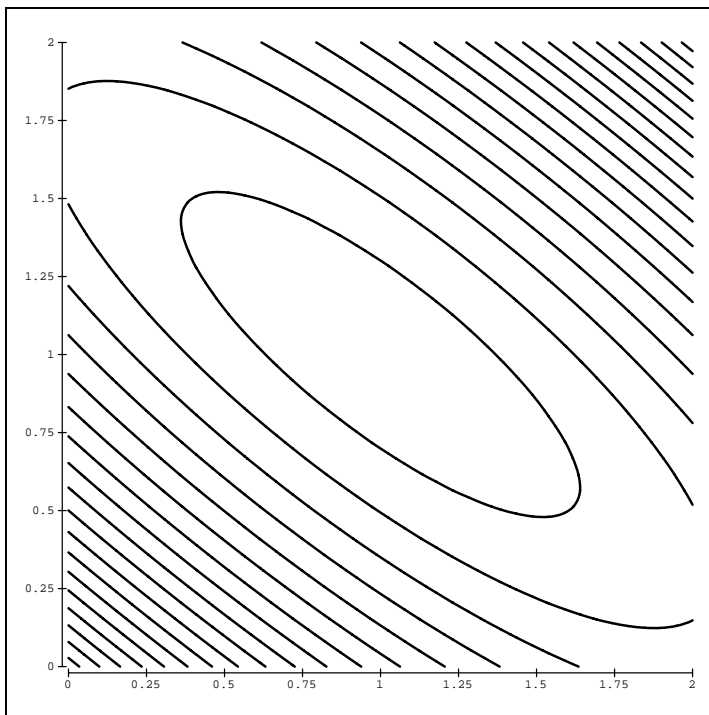


FIG. 5:
Niveaulinien der Funktion
 $f : (x, y) \rightarrow f(x, y) =$
 $= 2x^2 + 4xy + 3y^2 - 8x - 10y + 2$

Da die Funktion f überall differenzierbar ist, sind die Randpunkte und die gemeinsamen Nullpunkte der ersten partiellen Ableitungen näher zu untersuchen. Für letztere erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 4x + 4y - 8 = 0 \\ f_y(x, y) &= 4x + 6y - 10 = 0 \end{aligned}$$

Die einzige Lösung ist $x = y = 1$. Damit ist der Punkt $(1, 1)$ ein Kandidat für die globale Maximalstelle. Wir wenden uns jetzt den Randpunkten des Quadrates zu. Auf der Quadratseite AB , also für $y = 0$ erhält man

$$f(x, 0) = 2x^2 - 8x + 2 ;$$

auf AC , also für $x = 0$ erhält man

$$f(0, y) = 3y^2 - 10y + 2 ;$$

auf CD , also für $y = 2$ erhält man

$$f(x, 2) = 2x^2 + 8x + 12 - 8x - 18 = 2x^2 - 6$$

und auf BD , also für $x = 2$ erhält man

$$f(2, y) = 8 + 8y + 3y^2 - 16 - 10y + 2 = 3y^2 - 2y - 6 .$$

In jedem Fall erhält man eine quadratische Funktion, deren Graph eine nach oben geöffnete Parabel ist. Die grössten Funktionswerte werden also notwendigerweise in den Endpunkten der Definitionsintervalle, d.h. in den Eckpunkten A, B, C, D des Quadrates angenommen. Ein Vergleich der Werte von f auf diesen Punkten und auf dem Punkt $(1, 1)$ liefert dann das Resultat. Wir erhalten

$$f(0, 0) = 2, \quad f(2, 0) = -6, \quad f(0, 2) = -6, \quad f(2, 2) = 2, \quad f(1, 1) = -7 .$$

Die Punkte $A = (0, 0)$ und $D = (2, 2)$ sind also die beiden globalen Maximalstellen der Funktion f im Quadrat $ABCD$.