

## 7 Funktionen von drei Variablen

In diesem Abschnitt geht es darum, in verhältnismässig konzentrierter Weise reellwertige Funktionen von drei Variablen zu behandeln. Dabei wenden wir uns vor allem denjenigen Punkten zu, bei denen im Schritt von zwei auf drei Variablen neue Aspekte zur Geltung kommen.

Durch eine **reellwertige Funktion von drei Variablen**

$$f : (x, y, z) \rightarrow f(x, y, z)$$

wird jedem Tripel  $(x, y, z)$  eine reelle Zahl  $f(x, y, z)$  zugeordnet (siehe Figur 1). Der Definitionsbereich  $D(f)$  kann als eine Untermenge des dreidimensionalen Raumes angesehen werden.

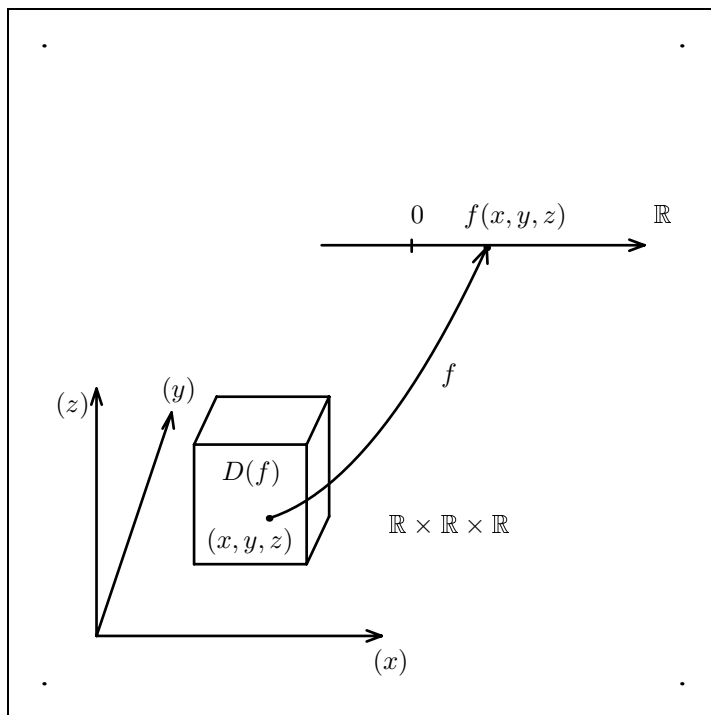


FIG. 1:  
Funktion von drei Variablen

In Anwendungen ist der Funktionswert  $f(x, y, z)$  oft eine skalare physikalische Grösse, die den Zustand in Punkte  $(x, y, z)$  beschreibt. Man denke in diesem Zusammenhang etwa an die (im

Körper  $D(f)$  herrschende, von Punkt zu Punkt variierende) Temperatur  $T$  oder an die (vom Ort abhängige) Dichte  $\rho$ .

**Beispiel** Die Funktion

$$f : (x, y, z) \rightarrow f(x, y, z) = ax + by + cz + d, \quad D(f) = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

heisst *linear*. Der Wertebereich  $W(f)$  besteht aus allen reellen Zahlen, falls  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ .

**Beispiel** Die Funktion

$$f : (x, y, z) \rightarrow f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

ist auf dem ganzen dreidimensionalen Raum mit Ausnahme des Nullpunktes definiert. Der Wertebereich besteht aus allen positiven Zahlen.

Zur Veranschaulichung solcher Funktionen stehen wiederum verschiedene Möglichkeiten zur Verfügung. Allerdings scheidet die Betrachtung des Graphen der Funktion weitgehend aus, da für diesen bei einer Funktion von drei Variablen ein vierdimensionaler Raum benötigt würde, der sich natürlich zur Veranschaulichung kaum eignet. Die wohl einfachste Art sich über das Verhalten einer Funktion von drei Variablen klar zu werden, dürfte darin bestehen, deren Niveauflächen zu betrachten.

Die **Niveaufläche** von  $f$  zum Niveau  $C$  ist die Fläche im dreidimensionalen Raum, die durch die Gleichung  $f(x, y, z) = C$  gegeben ist. Sie besteht aus allen Punkten im dreidimensionalen Raum, auf denen  $f$  den Wert  $C$  annimmt.

**Beispiel** Die Niveaufläche von  $f : (x, y, z) \rightarrow f(x, y, z) = ax + by + cz + d$  zum Niveau  $C$  ist die Ebene mit der Gleichung  $ax + by + cz = C - d$ .

Die Niveaufläche von

$$f : (x, y, z) \rightarrow f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

zum Niveau  $C$  ist gegeben durch

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = C ;$$

dies ist die Oberfläche einer Kugel mit Radius  $1/C$  und Mittelpunkt 0,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1/C^2 .$$

### Die partiellen Ableitungen

$$f_x(x, y, z), \quad f_y(x, y, z), \quad f_z(x, y, z) ;$$

bezeichnen wir auch durch

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) .$$

Sie sind auf offensichtliche Weise definiert. Ein Beispiel mag hier genügen.

**Beispiel** Es sei  $f : (x, y, z) \rightarrow f(x, y, z) = \sin(xyz)$  . Dann sind die partiellen Ableitungen gegeben durch

$$\begin{aligned} f_x(x, y, z) &= yz \cos(xyz) , \\ f_y(x, y, z) &= xz \cos(xyz) , \\ f_z(x, y, z) &= xy \cos(xyz) . \end{aligned}$$

Wegen des Satzes von Schwarz kommt es (unter geeigneten Stetigkeitsvoraussetzungen) nicht auf die Reihenfolge der partiellen Ableitungen an; z.B. gilt

$$f_{xz}(x, y, z) = f_{zx}(x, y, z) , \quad f_{xzy}(x, y, z) \equiv f_{xyx}(x, y, z) , \text{ etc. } .$$

Wie im Falle von zwei Variablen gibt der Satz von Schwarz Anlass zu **Integrabilitätsbedingungen**. Es seien drei Funktionen

$$\begin{aligned} \varphi : (x, y, z) &\rightarrow \varphi(x, y, z) , \\ \psi : (x, y, z) &\rightarrow \psi(x, y, z) , \\ \chi : (x, y, z) &\rightarrow \chi(x, y, z) \end{aligned}$$

von drei Variablen mit dem gemeinsamen Definitionsbereich  $D$  gegeben, und man suche eine Funktion

$$f : (x, y, z) \rightarrow f(x, y, z)$$

von drei Variablen mit

$$f_x \equiv \varphi , \quad f_y \equiv \psi , \quad f_z \equiv \chi .$$

Existiert die Funktion  $f$ , so müssen wegen dem Satz von Schwarz für die partiellen Ableitungen die folgenden Gleichungen gelten

$$\begin{aligned}\varphi_y \equiv f_{xy} &\equiv f_{yx} \equiv \psi_x , \\ \varphi_z \equiv f_{xz} &\equiv f_{zx} \equiv \chi_x , \\ \psi_z \equiv f_{yz} &\equiv f_{zy} \equiv \chi_y .\end{aligned}$$

Es gilt dann das zum Fall von zwei Variablen analoge Resultat: Wenn diese Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind, und der gemeinsame Definitionsbereich von  $\varphi, \psi, \chi$  ein achsenparalleler Quader ist, so existiert die Funktion  $f$ , und sie ist bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt.

**Beispiel** Es seien  $\varphi, \psi, \chi$  gegeben durch

$$\begin{aligned}\varphi(x, y, z) &= 3x^2 + 3y - 1 , \\ \psi(x, y, z) &= z^2 + 3x , \\ \chi(x, y, z) &= 2yz + 1 .\end{aligned}$$

Der gemeinsame Definitionsbereich ist der ganze dreidimensionale Raum. Wegen

$$\varphi_y(x, y, z) = 3 = \psi_x(x, y, z) , \quad \varphi_z(x, y, z) = 0 = \chi_x(x, y, z) , \quad \psi_z(x, y, z) = 2z = \chi_y(x, y, z)$$

sind die Integrabilitätsbedingungen erfüllt. Daraus folgt, dass die Funktion  $f$  existiert.

Aus  $f_x \stackrel{!}{=} \varphi$  folgt

$$f(x, y, z) = x^3 + 3xy - x + u(y, z) .$$

Die Bedingung

$$z^2 + 3x = \psi(x, y, z) \stackrel{!}{=} f_y(x, y, z) = 3x + u_y(y, z)$$

liefert dann

$$z^2 = u_y(y, z)$$

und daraus folgt

$$u(y, z) = yz^2 + v(z) .$$

Damit ist  $f$  von der Form

$$f(x, y, z) = x^3 + 3xy - x + yz^2 + v(z) .$$

Schliesslich liefert die dritte Bedingung

$$2yz + 1 = \chi(x, y, z) \stackrel{!}{=} f_z(x, y, z) = 2yz + v'(z)$$

die noch fehlende Information. Es gilt  $v'(z) = 1$  und damit

$$v(z) = z + C .$$

Die gesuchte Funktion  $f$  ist also durch

$$f(x, y, z) = x^3 + 3xy - x + yz^2 + z + C$$

gegeben.

Analog wie bei Funktionen von zwei Variablen lautet die **verallgemeinerte Kettenregel**. Es sei  $f : (x, y, z) \rightarrow f(x, y, z)$  eine Funktion von drei Variablen und  $t \rightarrow (x(t), y(t), z(t))$  die Parameterdarstellung einer Kurve im Definitionsbereich von  $f$ . Dann gilt für die zusammengesetzte Funktion  $F : t \rightarrow F(t) = f(x(t), y(t), z(t))$

$$\frac{dF}{dt}(t) = f_x(x(t), y(t), z(t)) \dot{x}(t) + f_y(x(t), y(t), z(t)) \dot{y}(t) + f_z(x(t), y(t), z(t)) \dot{z}(t) .$$

An dieser Stelle wollen wir nun einen Schritt weitergehen als bei der Behandlung von Funktion von zwei Variablen. Wir bemerken, dass die in dieser Ableitung vorkommende Bildung als Skalarprodukt von zwei Vektoren aufgefasst werden kann, nämlich als Skalarprodukt des Vektors

$$(f_x(x(t), y(t), z(t)), f_y(x(t), y(t), z(t)), f_z(x(t), y(t), z(t)))$$

mit dem Vektor

$$(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) .$$

Der letztere Vektor ist bekanntlich ein Tangentialvektor (der Geschwindigkeitsvektor) an die Kurve  $K$ . Wir machen die folgende Definition. Unter dem **Gradienten**  $\text{grad } f(x_0, y_0, z_0)$  von  $f$  im Punkt  $(x_0, y_0, z_0)$  verstehen wir den Vektor

$$\text{grad } f(x_0, y_0, z_0) = (f_x(x_0, y_0, z_0), f_y(x_0, y_0, z_0), f_z(x_0, y_0, z_0)) .$$

Mit dieser Bildung wird der Funktion  $f$  in jedem Punkt  $(x_0, y_0, z_0)$  ihres Definitionsbereiches ein Vektor  $\mathbf{grad} f(x_0, y_0, z_0)$  zugeordnet, den man sich natürlich in diesem Punkte angebracht denken kann. Der Gradient ordnet also jeder Funktion  $f$  ein Vektorfeld, das sogenannte **Gradientenfeld** von  $f$ , zu. Auf den wichtigen Begriff des Vektorfeldes kommen wir im Kapitel VI eingehend zu sprechen. Mit Hilfe des Gradienten schreibt sich die verallgemeinerte Kettenregel in der folgenden einfachen Form,

$$\frac{dF}{dt}(t) = \dot{\vec{r}}(t) \cdot \mathbf{grad} f(x(t), y(t), z(t)) ,$$

wo  $\dot{\vec{r}}(t)$  der zur Kurve gehörige Geschwindigkeitsvektor ist.

**Beispiel** Für die Funktion  $f : (x, y, z) \rightarrow ax + by + cz + d$  gilt

$$\mathbf{grad} f(x, y, z) = (a, b, c) .$$

Der Gradient der linearen Funktion ist ein konstanter Vektor.

**Beispiel** Für die Funktion

$$f : (x, y, z) \rightarrow \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$$

erhält man

$$\mathbf{grad} f(x, y, z) = \left( \frac{-2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \frac{-2y}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \frac{-2z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \right) .$$

Der Gradient von  $f$  zeigt in jedem Punkt gegen den Ursprung. Seine Länge ist gegeben durch  $2/(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$ . Sie ist umso grösser, je näher der Punkt  $(x, y, z)$  dem Ursprung ist.

Als nächstes betrachten wir den Spezialfall der verallgemeinerten Kettenregel, wo die Kurve  $K$  eine Gerade ist. Diese sei durch die Parameterdarstellung

$$t \rightarrow (x_0 + e_1 t, y_0 + e_2 t, z_0 + e_3 t)$$

gegeben, wobei wir annehmen, dass  $\vec{e}$  ein Einheitsvektor ist und wir für den ausgezeichneten Punkt der Geraden gerade den Punkt  $(x_0, y_0, z_0)$  genommen haben. Dann gilt wegen

$$\frac{dF}{dt}(t) = \dot{\vec{r}}(t) \cdot \mathbf{grad} f(x(t), y(t), z(t))$$

natürlich

$$\frac{dF}{dt}(0) = \vec{e} \cdot \mathbf{grad} f(x_0, y_0, z_0) .$$

Diesen Wert nennen wir die **Richtungsableitung** von  $f$  in  $(x_0, y_0, z_0)$  in Richtung  $\vec{e}$ ,

$$D_{\vec{e}}f(x_0, y_0, z_0) = \frac{dF}{dt}(0) = \vec{e} \cdot \mathbf{grad} f(x_0, y_0, z_0) .$$

Sie beschreibt die momentane Änderung des Funktionswertes an der Stelle  $(x_0, y_0, z_0)$  in Richtung  $\vec{e}$ . Man beachte, dass in dieser Definition  $\vec{e}$  ein Einheitsvektor ist.

**Beispiel** Für die Funktion  $f : (x, y, z) \rightarrow \sin(xyz)$  bestimme man die Richtungsableitung in  $(1, 0, 1)$  in Richtung des Einheitsvektors  $\frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1)$ . Es gilt

$$D_{\vec{e}}f(1, 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1) \cdot (0, 1, 0) = \frac{1}{\sqrt{3}} .$$

**Beispiel** Für  $\vec{e} = (1, 0, 0)$  erhält man für die Richtungsableitung in  $(x, y, z)$  in Richtung  $\vec{e}$

$$D_{\vec{e}}f(x, y, z) = \vec{e} \cdot \mathbf{grad} f(x, y, z) = f_x(x, y, z) .$$

Analoges gilt für  $\vec{e} = (0, 1, 0)$  und  $\vec{e} = (0, 0, 1)$ . Die partiellen Ableitungen von  $f$  sind also die Richtungsableitungen in Richtung der Koordinatenachsen.

Wie die Formel für die Richtungsableitung zeigt, ist diese an der Stelle  $(x_0, y_0, z_0)$  für jede beliebige Richtung  $\vec{e}$  bestimmt, wenn der Gradient von  $f$  in  $(x_0, y_0, z_0)$  bekannt ist: *Der Vektor  $\mathbf{grad} f(x_0, y_0, z_0)$  beschreibt, wie sich die Funktion  $f$  in der unmittelbaren Umgebung von  $(x_0, y_0, z_0)$  ändert.* Diesem Zusammenhang wollen wir hier noch etwas genauer nachgehen, indem wir die Abhängigkeit der Richtungsableitung von der Richtung  $\vec{e}$  studieren. Es gilt

$$D_{\vec{e}}f(x_0, y_0, z_0) = \vec{e} \cdot \mathbf{grad} f(x_0, y_0, z_0) = |\vec{e}| \cdot |\mathbf{grad} f(x_0, y_0, z_0)| \cdot \cos \omega ,$$

wobei  $\omega$  den von  $\vec{e}$  und dem Vektor  $\mathbf{grad} f(x_0, y_0, z_0)$  eingeschlossenen Winkel bezeichnet (siehe Figur 2). Wir lesen daran das Folgende ab:

Für  $\omega = 0$ , d.h. wenn  $\vec{e}$  die gleiche Richtung wie  $\mathbf{grad} f(x_0, y_0, z_0)$  besitzt, so gilt

$$D_{\vec{e}}f(x_0, y_0, z_0) = |\mathbf{grad} f(x_0, y_0, z_0)| .$$

Die Richtungsableitung ist in diesem Fall gerade *gleich* der Länge des Gradienten. Dies ist offensichtlich der grösstmögliche Wert der Richtungsableitung im Punkte  $(x_0, y_0, z_0)$ . Er wird gerade in der Richtung erreicht, in welche der Gradient zeigt; in Richtung des Gradienten ist folglich der grösste Anstieg der Funktionswerte von  $f$  festzustellen.

**Satz** Die Richtung des Gradienten  $\mathbf{grad} f(x_0, y_0, z_0)$  gibt die Richtung der grössten Richtungsableitung von  $f$  in  $(x_0, y_0, z_0)$  an; die Länge des Gradienten ist gleich der grössten Richtungsableitung von  $f$  in  $(x_0, y_0, z_0)$ .

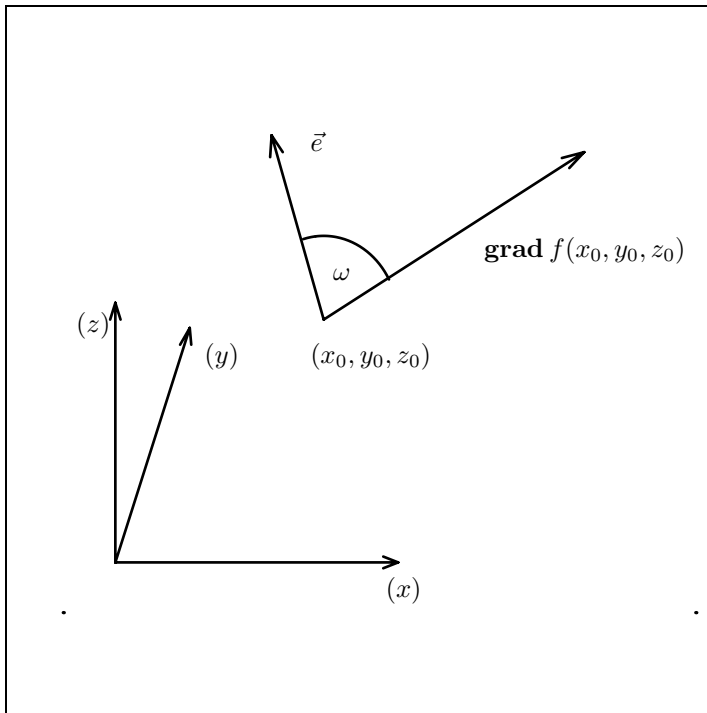


FIG. 2:  
Richtungsableitung von  $f$   
im Punkte  $(x_0, y_0, z_0)$   
und  $\mathbf{grad} f(x_0, y_0, z_0)$

Für  $\omega = \pi/2$ , d.h. für  $\vec{e} \perp \mathbf{grad} f(x_0, y_0, z_0)$  ist die Richtungsableitung  $D_{\vec{e}}f(x_0, y_0, z_0)$  Null, d.h. für die Richtung  $\vec{e}$  ist die momentane Änderung des Funktionswertes von  $f$  Null. Daraus schliessen wir, dass  $\vec{e}$  tangential zur Niveaufläche von  $f$  durch den Punkt  $(x_0, y_0, z_0)$  ist. Dies bedeutet aber, dass der Vektor  $\mathbf{grad} f(x_0, y_0, z_0)$  senkrecht auf der Niveaufläche steht.

**Satz** Der Gradient von  $f$  in  $(x_0, y_0, z_0)$  steht senkrecht auf der Niveaufläche von  $f$ , welche durch den Punkt  $(x_0, y_0, z_0)$  geht.

**Beispiel** Der Gradient der Funktion

$$f : (x, y, z) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

ist gegeben durch

$$\mathbf{grad} f(x, y, z) = \left( \frac{-x}{r^3}, \frac{-y}{r^3}, \frac{-z}{r^3} \right),$$

wobei wir wie üblich  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  gesetzt haben. Die Länge des Gradienten ist folglich

$$|\mathbf{grad} f(x, y, z)| = \frac{1}{r^2}.$$



Dies ist der Wert der grössten Richtungsableitung in  $(x, y, z)$ . Da der Gradient gegen den Nullpunkt zu gerichtet ist, wird die grösste Richtungsableitung (grösster Anstieg der Funktionswerte) in dieser Richtung erreicht.

Die in den beiden Sätzen beschriebenen Eigenschaften des Gradienten sind in Anwendungen äusserst nützlich. Wir geben dazu einige Beispiele.

**Beispiel** Gegeben seien die Flächenscharen

$$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 + 2z^2 &= C_1, \\ x^2 / \sqrt{y^2 - z^2} &= C_2. \end{aligned}$$

Man zeige, dass jede Fläche der einen Schar jede Fläche der andern Schar orthogonal schneidet.

Wir fassen die beiden Flächenscharen als Niveauflächen der Funktionen

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= x^2 + 2y^2 + 2z^2, \\ f_2(x, y, z) &= x^2 / \sqrt{y^2 - z^2} \end{aligned}$$

auf. Es ist dann zu zeigen, dass in  $(x, y, z)$  die Gradienten von  $f_1$  und  $f_2$  senkrecht aufeinanderstehen, d.h. dass das Skalarprodukt  $\mathbf{grad} f_1 \cdot \mathbf{grad} f_2$  Null ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \mathbf{grad} f_1(x, y, z) &= (2x, 4y, 4z), \\ \mathbf{grad} f_2(x, y, z) &= \left( \frac{2x}{(y^2 - z^2)^{1/2}}, \frac{-x^2 y}{(y^2 - z^2)^{3/2}}, \frac{x^2 z}{(y^2 - z^2)^{3/2}} \right). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für das Skalarprodukt sofort

$$\mathbf{grad} f_1 \cdot \mathbf{grad} f_2 = \frac{1}{(y^2 - z^2)^{3/2}} (4x^2(y^2 - z^2) - 4x^2 y^2 + 4x^2 z^2) = 0.$$

**Beispiel** Wir betrachten in diesem Beispiel die Niveaufläche durch den Punkt  $(x_0, y_0, z_0)$  der Funktion  $f$  und fragen nach der Gleichung der Tangentialebene im Punkt  $(x_0, y_0, z_0)$ .

Wir wissen, dass der Gradient  $\mathbf{grad} f(x_0, y_0, z_0)$  senkrecht auf der Niveaufläche durch  $(x_0, y_0, z_0)$  steht. Damit ist dieser Vektor auch senkrecht zur Tangentialebene. Die Tangentialebene geht ausserdem durch den Punkt  $(x_0, y_0, z_0)$ . Ihre Gleichung lautet damit offenbar

$$\begin{aligned} f_x(x_0, y_0, z_0) x + f_y(x_0, y_0, z_0) y + f_z(x_0, y_0, z_0) z &= \\ = f_x(x_0, y_0, z_0) x_0 + f_y(x_0, y_0, z_0) y_0 + f_z(x_0, y_0, z_0) z_0 \end{aligned}$$

**Beispiel** Es sei  $(x_0, y_0, z_0)$  ein Punkt des Ellipsoides

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 .$$

Gesucht ist die Tangentialebene in  $(x_0, y_0, z_0)$  an das Ellipsoid (siehe Figur 3).

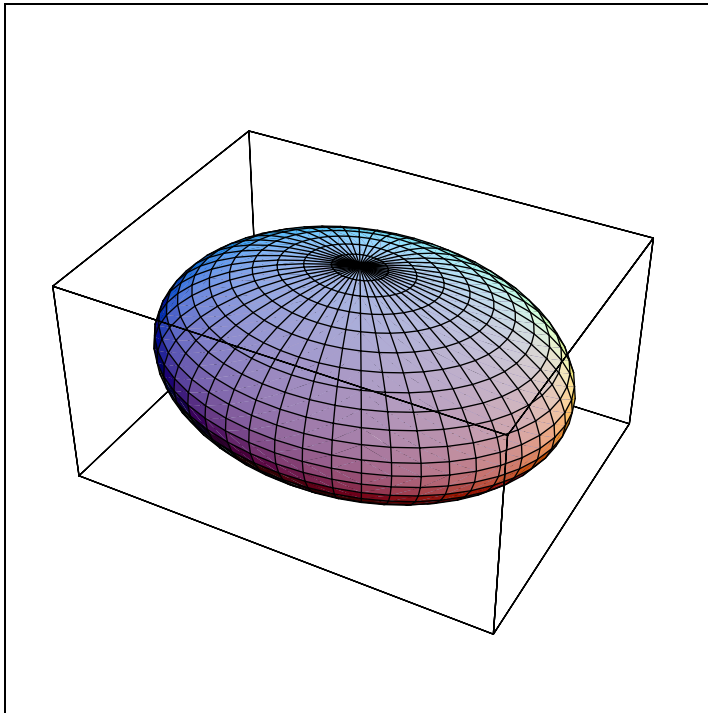


FIG. 3 :  
Ellipsoid

Wir fassen das Ellipsoid als die durch den Punkt  $(x_0, y_0, z_0)$  gehende Niveaufäche der Funktion

$$f : (x, y, z) \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$$

auf. Die Tangentialebene wird dann durch die Gleichung

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0,$$

also durch

$$\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{2z_0}{c^2}(z - z_0) = 0$$

beschrieben. Berücksichtigt man, dass der Punkt  $(x_0, y_0, z_0)$  die Gleichung

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1$$

erfüllt, so ergibt sich daraus die folgende einfache Form der Gleichung der Tangentialebene im Punkte  $(x_0, y_0, z_0)$  an das Ellipsoid

$$\frac{x_0}{a^2} x + \frac{y_0}{b^2} y + \frac{z_0}{c^2} z = 1 .$$

**Beispiel** Die lineare Ersatzfunktion einer Funktion  $f$  von drei Variablen ist analog definiert wie im Falle von zwei Variablen. Sie ist diejenige lineare Funktion, die in  $(x_0, y_0, z_0)$  denselben Funktionswert und auch dieselben ersten partiellen Ableitungen wie die Funktion  $f$  besitzt. Die lineare Ersatzfunktion von  $f : (x, y, z) \rightarrow f(x, y, z)$  in  $(x_0, y_0, z_0)$  wird deshalb durch die Formel

$$(x, y, z) \rightarrow f(x_0, y_0, z_0) + f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0)$$

beschrieben. Schliesslich gilt auch hier, analog zum Fall von zwei Variablen, dass die Differenz zwischen dem Funktionswert und dem Wert der linearen Ersatzfunktion von kleinerer Grössenordnung ist als der Abstand des Punktes  $(x, y, z)$  vom Punkt  $(x_0, y_0, z_0)$ , d.h. es gilt

$$\lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{\varphi(\Delta x, \Delta y, \Delta z)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}} = 0 .$$