

3 Polynome

In diesem Abschnitt wollen wir die einfachsten komplexwertigen Funktionen einer komplexen Variable etwas näher betrachten, nämlich die Polynome.

Ein (komplexes) **Polynom** p ist eine Funktion der Form

$$p: z \rightarrow p(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n$$

mit $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$. Diese komplexen Zahlen heissen die **Koeffizienten** von p . Die natürliche Zahl n heisst **Grad** von p , $\text{Grad } p = n$ (falls $c_n \neq 0$). Offenbar kann man Polynome in der üblichen Art und Weise addieren und multiplizieren. Für die Grade gilt

$$\begin{aligned} \text{Grad}(p + q) &\leq \max(\text{Grad } p, \text{Grad } q) , \\ \text{Grad}(p \cdot q) &= \text{Grad } p + \text{Grad } q . \end{aligned}$$

Eine komplexe Zahl z_0 heisst **Nullstelle** des Polynoms p , wenn gilt $p(z_0) = 0$.

Beispiel Das Polynom

$$p: z \rightarrow p(z) = c_0 + z^n$$

hat wegen $c_n = 1 \neq 0$ den Grad n . Seine Nullstellen sind die Lösungen der Gleichung $z^n = w, w = -c_0$. Im Abschnitt 1 haben wir die komplexen Lösungen angegeben und gesehen, dass es davon n verschiedene gibt.

Beispiel Das Polynom

$$p: z \rightarrow p(z) = z^2 + (2i)z + (-4 + 4i)$$

hat als Nullstellen die komplexen Zahlen $z_1 = 2 - 2i, z_2 = -2$.

Ist p ein beliebiges Polynom, so ist a priori nicht klar, ob p überhaupt Nullstellen besitzt. Die Aussage, dass dies tatsächlich der Fall ist, ist ein tiefliegender mathematischer Satz, der sogenannte “Fundamentalsatz der Algebra”, der erstmals von Gauss bewiesen worden ist. Wir erwähnen ihn hier ohne Beweis.

Satz *Es sei p ein Polynom mit $\text{Grad } p \geq 1$. Dann gibt es (mindestens) eine Nullstelle von p .*

Wir machen dazu die folgende Bemerkung: Für Grad $p = 1, 2$ (und mit etwas mehr Mühe für Grad $p = 3, 4$) lassen sich für die Nullstellen von p Wurzelformeln angeben. Man kann beweisen, dass für Polynome vom Grad grösser gleich 5 solche allgemeinen Lösungsformeln mit Wurzeln nicht existieren können. Der Satz von Gauss sagt nur über die *Existenz* von Nullstellen etwas aus, und *nichts* über die Art und Weise, wie die Nullstellen gefunden werden können. Da das Problem, Nullstellen von Polynomen zu bestimmen, in Anwendungen häufig auftritt, besteht ein grosses Bedürfnis, Methoden dafür zu entwickeln. In der Tat stellt uns die numerische Mathematik eine ganze Anzahl von solchen Verfahren zur Verfügung; in dieser Vorlesung können wir aber darauf natürlich nicht eingehen.

Die Folgerungen aus dem Satz von Gauss sind vielfältig; einige davon werden wir im Folgenden zur Sprache bringen. Zuerst aber beschäftigen wir uns kurz mit einem (wohlbekannten) rechnerischen Hilfsmittel.

- *Es seien p und q Polynome mit Grad $p = n$ und Grad $q = m \leq n$. Dann gibt es Polynome r und s mit $p(z) = r(z) \cdot q(z) + s(z)$ und Grad $s < m$.*

Wir beweisen auch diese Aussage hier nicht, sondern geben nur an, dass r und s auf einfache Weise durch den üblichen Divisionsalgorithmus bestimmt werden können.

Es sei nun z_1 eine Nullstelle von p , $p(z_1) = 0$. Indem man $q(z) = z - z_1$ setzt, folgt aus der obigen Aussage, dass sich $p(z)$ in der Form

$$(3.1) \quad p(z) = r(z)(z - z_1) + s(z)$$

schreiben lässt mit Grad $s < 1$. Wegen Grad $s < 1$ folgt, dass s eine Konstante ist. Setzt man $z = z_1$, so erhält man aus (3.1)

$$0 = p(z_1) = r(z_1)(z_1 - z_1) + s(z_1) = s(z_1) .$$

Damit ist das folgende Resultat bewiesen.

- *Ist z_1 eine Nullstelle von p , so lässt sich $z - z_1$ "abspalten"; d.h. es gibt ein Polynom r mit Grad $r = n - 1$ und $p(z) = (z - z_1) r(z)$.*

Das Vorgehen lässt sich offenbar mit dem Polynom r an Stelle von p wiederholen, solange dieses Polynom einen Grad ≥ 1 besitzt. Damit erhält man schliesslich eine Zerlegung von p in "Linearfaktoren".

- *Das Polynom $p : z \rightarrow p(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n$ lässt sich in der Form*

$$(3.2) \quad p(z) = c_n \cdot (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

schreiben.

Die komplexen Zahlen z_1, z_2, \dots, z_n sind Nullstellen von p . Diese sind durch p eindeutig bestimmt. Ist nämlich w eine komplexe Zahl, die von z_1, z_2, \dots, z_n verschieden ist, so folgt aus der Zerlegung (3.2) $p(w) \neq 0$. Wir schliessen daraus:

- *Ein Polynom p vom Grad n hat höchstens n Nullstellen.*

Das Wort “höchstens” tritt hier deshalb auf, weil unter den Zahlen z_1, z_2, \dots, z_n , die in (3.2) auftreten, einzelne mehrfach vorkommen können.

Beispiel Das Polynom $p : z \rightarrow p(z) = z^2 + 2iz - 1$ lässt sich in der Form

$$p(z) = (z + i)(z + i)$$

schreiben. Man sagt p besitze $-i$ als “doppelte Nullstelle”.

Wir definieren die *Vielfachheit* k_0 der Nullstelle z_0 von p als grösste ganze Zahl mit der Eigenschaft, dass sich p in der Form

$$p(z) = (z - z_0)^{k_0} \cdot t(z)$$

schreiben lässt. (Es ist dann natürlich $t(z_0) \neq 0$!)

- *Das Polynom $p : z \rightarrow p(z) = c_0 + c_1z + \dots + c_nz^n$ lässt sich in der Form*

$$p(z) = c_n \cdot (z - z_1)^{k_1} \dots (z - z_l)^{k_l}$$

schreiben. Dabei bezeichnen z_1, z_2, \dots, z_l die verschiedenen Nullstellen von p und k_1, k_2, \dots, k_l deren Vielfachheiten. Es gilt $k_1 + k_2 + \dots + k_l = n$, d.h. die Summe der Vielfachheiten der Nullstellen eines Polynoms ist gleich dem Grad des Polynoms.

Wir nennen das Polynom $p : z \rightarrow p(z) = c_0 + c_1z + \dots + c_nz^n$ *reell*, wenn alle seine Koeffizienten c_0, c_1, \dots, c_n reell sind. Wir behaupten

- *Ist z_0 eine Nullstelle des reellen Polynoms p , so ist auch die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z_0}$ eine Nullstelle von p .*

Es folgt nämlich aus $0 = p(z_0) = c_0 + c_1z_0 + \dots + c_nz_0^n$ sofort

$$0 = \overline{0} = \overline{p(z_0)} = \overline{c_0 + c_1z_0 + \dots + c_nz_0^n} = c_0 + c_1\overline{z_0} + \dots + c_n\overline{z_0}^n = p(\overline{z_0}) .$$

Die komplexen Nullstellen eines reellen Polynoms treten somit in konjugiert komplexen Paaren auf.

Beispiel Das Polynom $p : z \rightarrow z^6 - 1$ ist reell; es besitzt die komplexen Zahlen

$$z_k = e^{i\frac{2\pi}{6}k}, \quad k = 1, 2, \dots, 6$$

als Nullstellen. Offenbar sind z_3 und z_6 reell; ferner sind z_1 und z_5 , sowie z_2 und z_4 konjugiert komplexe Paare.

Betrachten wir in der Zerlegung eines reellen Polynoms in Linearfaktoren die beiden zur komplexen Nullstelle z_0 gehörigen Faktoren $(z - z_0), (z - \overline{z_0})$, so stellen wir fest, dass

$$(z - z_0)(z - \overline{z_0}) = z^2 - (z_0 + \overline{z_0})z + z_0\overline{z_0}$$

ein quadratisches *reelles* Polynom ist (mit konjugiert komplexen Nullstellen). Damit folgt:

- Ist $p : z \rightarrow p(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots + c_nz^n$ ein reelles Polynom, so lässt sich dieses in der Form

$$p(z) = c_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_l) \cdot (q_1(z) \cdots q_m(z))$$

schreiben, wobei z_1, \dots, z_l die reellen Nullstellen sind, und q_1, \dots, q_m die quadratischen reellen Polynome bezeichnen, die zu den konjugiert komplexen Paaren von komplexen Nullstellen gehören (natürlich jeweils mit ihren Vielfachheiten).