

U. Stambach: Analysis I/II
Zusätzliches Material zu: Komplexe Funktionen

Wir haben bei unserer kurzen Behandlung komplexer Zahlen nebenbei auch komplexwertige Funktionen einer komplexen Variablen gestreift. Wir wollen hier – ausserhalb des üblichen Vorlesungsstoffes – dazu noch einige Bemerkungen machen. Es sei $f : z \rightarrow f(z)$ eine derartige Funktion. Wir definieren die *komplexe Ableitung* f' von f im Punkte z_0 durch den Grenzübergang

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} . \quad (1)$$

In der komplexen Zahlenebene entspricht der komplexen Zahl z ein Punkt, der im Grenzübergang gegen z_0 strebt, und zwar in *irgendeiner* Art und in *irgendeiner* Richtung. Für die Existenz des Limes (1) wird somit insbesondere die Unabhängigkeit von der *Richtung* gefordert, in der z gegen z_0 strebt. Wir bemerken, dass es durchaus vorkommen kann, dass zwar der Grenzwert für jede feste Richtung existiert, aber je nach Richtung verschieden ist (siehe dazu weiter unten). In diesem Fall existiert gemäss Definition die komplexe Ableitung f' an der Stelle z_0 *nicht*.

Eine Funktion $f : z \rightarrow f(z)$, die an jeder Stelle eines Gebietes G eine (komplexe) Ableitung besitzt, heisst *holomorph* in G (oder, besonders in der älteren Literatur, *analytisch* in G).

Beispiel Die Funktion $f : z \rightarrow z^2$ besitzt in jedem Punkt z_0 eine Ableitung. Setzen wir $\Delta z = z - z_0$, so gilt nämlich

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z_0 + \Delta z)^2 - z_0^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (2z_0 + \Delta z) = 2z_0 .$$

Beispiel Die Funktion $g : z \rightarrow \operatorname{Re} z$ besitzt *keine* komplexe Ableitung. Lässt man z auf einem Strahl gegen z_0 streben, wird also $a := \arg(z - z_0)$ während des Grenzübergangs konstant gehalten, so existiert

$$\lim_{z \rightarrow z_0, \arg(z - z_0) = a} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} .$$

Diese Limes sind aber für verschiedene Werte von a *verschieden*: zum Beispiel ergibt sich für $a = 0$ als Limes 1, und für $a = \pi/2$ erhält man 0. Für die Funktion $g(z) = \operatorname{Re} z$ existiert also gemäss Definition die komplexe Ableitung *nicht*.

Die Forderung nach der Existenz des Limes (1) ist überraschend stark. So kann man zum Beispiel beweisen, dass jede in G holomorphe Funktion f dort automatisch *unendlich* oft differenzierbar ist: Aus der Existenz einer Ableitung *erster* Ordnung folgt die Existenz der Ableitung jeder beliebigen Ordnung.

Setzt man, wie üblich, $z = x + iy$ mit $x = \operatorname{Re} z$ und $y = \operatorname{Im} z$, so lässt sich $f(z)$ schreiben als

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

mit $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ und $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$. Es sind u und v dann offenbar zwei reellwertige Funktionen der zwei reellen Variablen x und y .

Ist die Funktion f differenzierbar in z_0 , so ist der Grenzwert (1) gemäss Definition unabhängig von der Richtung, in der z gegen z_0 strebt. Dies übersetzt sich in Eigenschaften der Funktionen u und v . Im Falle $\arg(z - z_0) = 0$, also für $\Delta z = z - z_0 = \Delta x$, erhält man

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$$

und im Falle $\arg(z - z_0) = \pi/2$, also für $\Delta z = z - z_0 = i\Delta y$, erhält man

$$f'(z_0) = \frac{1}{i}u_y(x_0, y_0) + v_y(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0) .$$

Es folgt daraus, dass u und v die beiden (partiellen) Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

erfüllen. Das sind die sogenannten *Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen*.

Man kann zeigen – dies ist eine weitere Überraschung –, dass umgekehrt die (komplexe) Funktion $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ differenzierbar ist, wenn u und v die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen erfüllen. Durch einfache Rechnung ergibt sich aus diesen Überlegungen u.a. der folgende Satz:

Satz *Es seien $u(x, y)$ und $v(x, y)$ Real- und Imaginärteil einer im Gebiet G holomorphen Funktion. Dann gilt*

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, \quad v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y) = 0 .$$

Sowohl u wie auch v sind somit Lösungen der Laplace'schen Differentialgleichung.

Dieses Resultat macht einsichtig, dass überall dort, wo man sich mit der (zweidimensionalen) Laplace-Differentialgleichung beschäftigt, holomorphe Funktionen eine Rolle spielen werden. Dies ist z.B. in der *Potentialtheorie* der Fall: Das elektrische Potential in einem (ebenen) Gebiet G , auf dessen Rand ∂G eine Verteilung elektrischer Ladung gegeben ist, genügt – wie man in der Physik lernt – der Laplace-Differentialgleichung.

Einer anders gelagerte Anwendung holomorpher Funktionen begegnet man in der *Strömungsmechanik*. Sie basiert auf der folgenden Erkenntnis. Wenn man (auf einem gewissen Näherungsniveau) die Strömung um ein Profil B in der Ebene bestimmen

will, so lässt sich diese aus der Strömung um den Einheitskreis berechnen, wenn man eine winkeltreue Abbildung kennt, die den Einheitskreis auf das Profil B abbildet. (Als konkretes Beispiel stelle man sich einen Tragflügel eines Flugzeuges vor, der senkrecht auf der betrachteten Ebene steht und dessen Querschnitt durch B gegeben ist.) Es gilt nun der wichtige mathematische Satz, dass eine holomorphe Funktion $f : z \rightarrow f(z)$ überall dort eine *winkeltreue Abbildung* definiert, wo die Ableitung f' nicht Null ist. Ferner gibt es den tiefliegenden Abbildungssatz von Riemann, dessen wesentliche Aussage die ist, dass es für jedes Profil B eine holomorphe Funktion f der verlangten Art gibt. Mit diesen beiden Sätzen ist das Problem ebener Strömungen (auf dem betrachteten Näherungsniveau) im Prinzip gelöst: Man braucht nur die ebene Strömung um den Einheitskreis in der komplexen Ebene und die zum Profil B gehörige Abbildung f zu betrachten. Allerdings bleiben im allgemeinen massgebliche Schwierigkeiten in der Konstruktion der Abbildung f . Dieses Vorgehen bietet über die hier angegebenen hinaus, auch noch weitere Vorteile, auf die wir hier nicht eingehen können.

Der Riemann'sche Abbildungssatz ist mathematisch sehr schwierig, und wir wollen uns deshalb auf den anderen Schritt konzentrieren, nämlich auf die Tatsache, dass eine holomorphe Funktion überall dort, wo die Ableitung nicht verschwindet, *winkeltreu* (konform) ist.

Satz Es sei $f : z \rightarrow f(z)$ eine in G holomorphe Funktion und z_0 ein Punkt in G . Gilt $f'(z_0) \neq 0$, so vermittelt f eine in z_0 winkeltreue Abbildung.

Beweis Wir führen unsere Überlegungen rein reell durch und schreiben

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Zu f gehört dann eine Abbildung der (x, y) -Ebene in die (u, v) -Ebene, die durch die beiden Funktionen u und v gegeben ist,

$$\begin{aligned} u &= u(x, y), \\ v &= v(x, y). \end{aligned}$$

Wir fixieren den Punkt (x_0, y_0) , der zu z_0 gehört, und wenden unsere in Kap. V, Seite 37 gemachten Überlegungen an. (Dort sind die Rollen von (u, v) und (x, y) vertauscht.) Wir erhalten für die durch f induzierte Abbildung des "Vektors" (dx, dy)

$$\begin{aligned} du &= u_x(x_0, y_0) dx + u_y(x_0, y_0) dy \\ dv &= v_x(x_0, y_0) dx + v_y(x_0, y_0) dy. \end{aligned}$$

Zu dieser linearen(!) Abbildung gehört die Matrix (Jacobimatrix!)

$$\begin{bmatrix} u_x(x_0, y_0) & u_y(x_0, y_0) \\ v_x(x_0, y_0) & v_y(x_0, y_0) \end{bmatrix}.$$

Wenden wir die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen an, so können wir die Matrix in der Form

$$\begin{bmatrix} u_x(x_0, y_0) & -v_x(x_0, y_0) \\ v_x(x_0, y_0) & u_x(x_0, y_0) \end{bmatrix}.$$

schreiben. Daran erkennt man (siehe Lineare Algebra), dass die Abbildung eine Drehstreckung ist: der Drehwinkel ϕ ist gegeben durch

$$\tan \phi = v_x(x_0, y_0)/u_x(x_0, y_0) = \arg(f'(z_0))$$

und die Streckung ist gegeben durch

$$\rho = \sqrt{(u_x(x_0, y_0))^2 + (v_x(x_0, y_0))^2} = |f'(z_0)|.$$

Bei einer Drehstreckung bleiben aber die Winkel erhalten! Damit ist bewiesen, dass die durch f vermittelte Abbildung in z_0 winkeltreu (konform) ist.

Bemerkung Übersetzt man das Resultat unserer letzten Überlegung wieder ins Komplexe, so kann man es kurz durch die Formel für das Differential

$$df = f'(z_0) dz$$

zusammenfassen. Das Differential ist dabei komplex aufzufassen, entspricht aber sonst dem Differential einer reellen Funktion (siehe Kap. II, Seite 17). Wie wir wissen, ist die Multiplikation mit $f'(z_0)$ in der komplexen Zahlenebene nämlich eine Drehstreckung um den Winkel $\arg(f'(z_0))$ und mit Streckungsfaktor $|f'(z_0)|$.

Was die Abbildungsfunktion f betrifft, so ist es instruktiv, die Funktion

$$f : z \rightarrow z + \frac{1}{z}$$

zu betrachten. Sie ist Thema des Zusatzes “Joukowski-Funktion und Strömungslinien um ein Flügelprofil”.