

1 Komplexe Zahlen

Eine **komplexe Zahl** z lässt sich in eindeutiger Weise in der Form

$$a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

schreiben, wobei das Symbol i die *imaginäre Einheit*, $i^2 = -1$ bezeichnet. Die reelle Zahl a heisst *Realteil* und die reelle Zahl b heisst *Imaginärteil* von z . Die reellen Zahlen \mathbb{R} denkt man sich in den komplexen Zahlen \mathbb{C} eingebettet, indem man der reellen Zahl a die komplexe Zahl $a + i0$ zuordnet.

Die Rechenoperationen mit komplexen Zahlen genügen den fundamentalen Rechengesetzen, die man von den reellen Zahlen her kennt: Die Addition ist kommutativ und assoziativ, die Multiplikation ist kommutativ und assoziativ und verhält sich gegenüber der Addition distributiv. Für

$$\begin{aligned} z &= a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R} \\ z' &= a' + ib', \quad a', b' \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ist die *Summe* definiert durch

$$(1.1) \quad z + z' = (a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$$

und das *Produkt* wegen $i^2 = -1$ durch

$$(1.2) \quad z \cdot z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b) .$$

Zu jeder von Null verschiedenen komplexen Zahl $z \neq 0 = 0 + i0$ gibt es ein *Inverses* $1/z$. Es gilt für $0 \neq z = a + ib$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{1}{a + ib} \frac{a - ib}{a - ib} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2} .$$

Aus diesem Grund kann man in \mathbb{C} durch von Null verschiedene komplexe Zahlen dividieren.

Beispiel

$$\left(\frac{8-i}{5+i} \right)^2 = \left(\frac{(8-i)(5-i)}{(5+i)(5-i)} \right)^2 = \left(\frac{39-13i}{26} \right)^2 = \frac{1}{4}(3-i)^2 = \frac{1}{4}(9-6i-1) = \frac{1}{2}(4-3i).$$

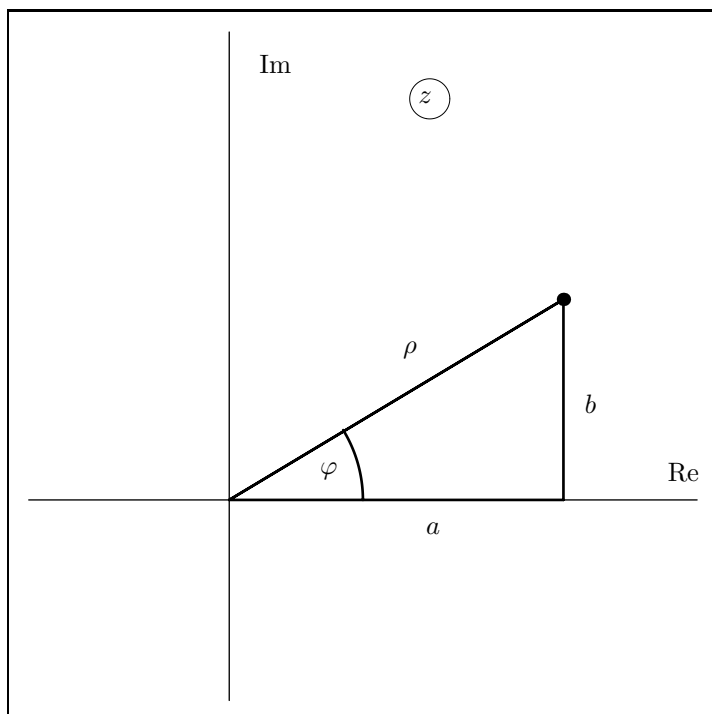


FIG. 1:
Die komplexe Zahlenebene

Komplexe Zahlen lassen sich in einfacher Weise in der sogenannten **komplexen** (oder **Gauss-schen**) **Zahlenebene** (siehe Figur 1) veranschaulichen: Man fasst die komplexe Zahl $z = a + ib$ als Punkt mit den (kartesischen) Koordinaten (a, b) in der Ebene auf. Die waagerechte Koordinatenachse bezeichnet man als *reelle Achse*, die senkrechte als *imaginäre Achse*.

In der komplexen Zahlenebene entspricht der Addition von komplexen Zahlen offenbar die Addition von Vektoren. Auch die Multiplikation einer komplexen Zahl z mit einer reellen Zahl r lässt sich unmittelbar als Multiplikation des “Vektors” z mit dem “Skalar” r deuten. Die Multiplikation von zwei *komplexen* Zahlen lässt sich geometrisch in einfacher Weise beschreiben, wenn man in der komplexen Zahlenebene Polarkoordinaten (ρ, φ) einführt. Offenbar gilt für $z = a + ib$

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{a^2 + b^2}, \\ \varphi &= \begin{cases} \arctan(b/a) & \text{für } a > 0 \\ \arctan(b/a) + \pi & \text{für } a < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

wobei wie üblich die Formel für φ im Fall $a = 0$ sinnvoll zu ergänzen ist. Ausserdem ist φ nur bis auf ein Vielfaches von 2π bestimmt. Es heisst ρ der (absolute) *Betrag* $|z|$ von z , und φ das *Argument* $\arg z$ von z .

Die komplexe Zahl $\cos \varphi + i \sin \varphi$ besitzt den absoluten Betrag 1; sie liegt auf dem Einheitskreis mit Mittelpunkt 0 in der komplexen Zahlenebene. Wir führen für eine solche komplexe Zahl die

folgende, von Euler stammende Schreibweise ein:

$$(1.3) \quad \cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$$

(siehe dazu Kapitel VIII, Abschnitt 4). Es bezeichnet also $e^{i\varphi}$ die komplexe Zahl mit Betrage 1 und Argument φ . Diese etwas willkürlich erscheinende Festsetzung rechtfertigen wir hier dadurch, dass wir zeigen, dass für $e^{i\varphi}$ die für die Exponentialfunktion übliche Rechenregel gilt, nämlich

$$e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{i\alpha+i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)} .$$

Der *Beweis* besteht in der folgenden einfachen Rechnung, welche die Additionstheoreme für \cos und \sin verwendet:

$$\begin{aligned} e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} &= (\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot (\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + i(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \\ &= \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) \\ &= e^{i(\alpha+\beta)} . \end{aligned}$$

Ist z eine beliebige, von Null verschiedene komplexe Zahl mit Betrag $|z|$ und Argument φ , so lässt sich z schreiben als

$$(1.4) \quad z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z| \cdot e^{i\varphi} .$$

Wir nennen dies die *Polardarstellung* der komplexen Zahl z . Mit ihrer Hilfe beschreibt sich die Multiplikation von komplexen Zahlen in der komplexen Zahlenebene wie folgt: Für $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$ und $z' = |z'| \cdot e^{i\varphi'}$ erhalten wir

$$z \cdot z' = |z| \cdot e^{i\varphi} \cdot |z'| \cdot e^{i\varphi'} = |z| \cdot |z'| \cdot e^{i(\varphi+\varphi')} .$$

Bei der Multiplikation von komplexen Zahlen werden die absoluten Beträge multipliziert und die Argumente addiert:

$$|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|, \quad \arg(z \cdot z') = \arg z + \arg z' .$$

Neben den Rechenoperationen Addition und Multiplikation spielt bei komplexen Zahlen auch die *Konjugation* eine grosse Rolle. Die zu $z, z = a + ib$ konjugierte komplexe Zahl ist gegeben durch $\bar{z} = a - ib$ (siehe Figur 2). Es gilt offenbar:

$$(1.5) \quad a = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) , \quad b = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) .$$

Damit sind Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl durch z und \bar{z} ausgedrückt. Ferner gelten, wie man leicht bestätigt, die folgenden Beziehungen

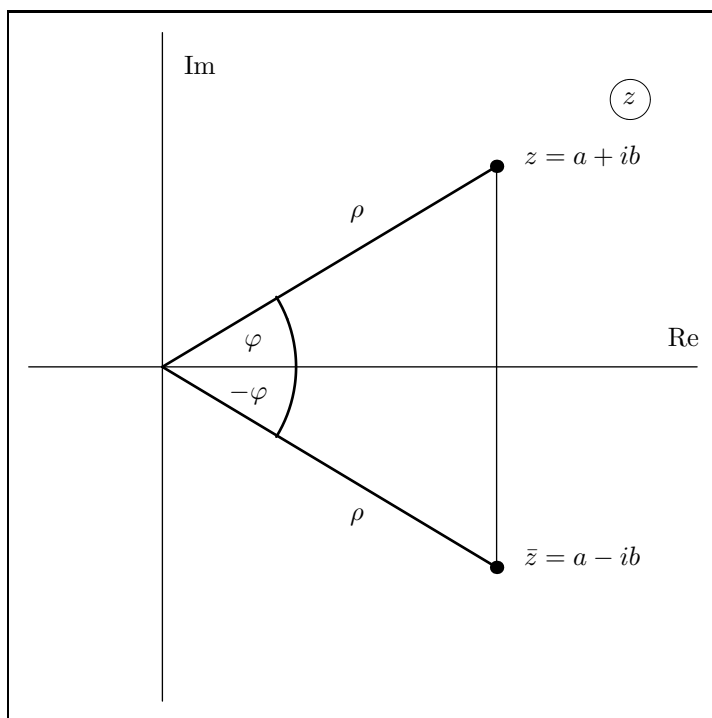


FIG. 2:
Konjugieren
komplexer Zahlen

$$\overline{\bar{z}} = z$$

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$$

$$\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z'}$$

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$$

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} .$$

Für $z = e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ gilt

$$\bar{z} = \cos \varphi - i \sin \varphi = \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi) = e^{-i\varphi}.$$

Damit erhalten wir mit Hilfe der Formeln (1.3) und (1.5)

$$(1.6) \quad \cos \varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) \quad , \quad \sin \varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}).$$

Dies sind die berühmten **Euler'schen Formeln** (L. Euler 1707-1783).

Beispiel Man drücke $\cos(n\varphi)$, $\sin(n\varphi)$, $n = 2, 3, \dots$ durch die Werte der Winkelfunktionen \cos und \sin des einfachen Winkels φ aus.

Ausgehend von den bekannten Formeln für $n = 2$ lässt sich die Aufgabe mit etwas Mühe direkt lösen. Einfacher und sicherlich eleganter ist aber das folgende Vorgehen. Wir betrachten die komplexe Zahl $z = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)$. Dann gilt

$$z = e^{in\varphi} = (e^{i\varphi})^n = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n.$$

Also

$$z = \cos^n \varphi + i \binom{n}{1} \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi + i^2 \binom{n}{2} \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi + \dots + i^n \sin^n \varphi.$$

Indem wir Real- und Imaginärteil dieses Ausdruckes betrachten, erhalten wir

$$(1.7) \quad \cos(n\varphi) = \cos^n \varphi - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi + \dots,$$

$$(1.8) \quad \sin(n\varphi) = \binom{n}{1} \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \varphi \sin^3 \varphi + \dots.$$

Diese sogenannten *Formeln von Moivre* (Moivre 1667-1754) verallgemeinern die wohlbekannten Formeln für $\cos(2\varphi)$ und $\sin(2\varphi)$.

Wir haben in diesem Abschnitt gesehen, dass das Potenzieren einer komplexen Zahl sehr einfach wird, wenn man die Polardarstellung verwendet. In der Tat gilt ja

$$z^n = (|z| \cdot e^{i\varphi})^n = |z|^n \cdot e^{in\varphi}.$$

Beispiel Es sei $z = -\sqrt{3} + i\sqrt{3}$. Man berechne z^{10} .

Es gilt

$$z = \sqrt{6} \cdot e^{i\varphi}, \quad \varphi = 3\pi/4.$$

Damit erhalten wir

$$z^{10} = (\sqrt{6})^{10} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}10} = 6^5 \cdot e^{i\frac{15\pi}{2}} = 6^5 \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}} = -6^5 i.$$

Offenbar ist die Polardarstellung auch geeignet, Licht in das folgende Problem zu bringen.

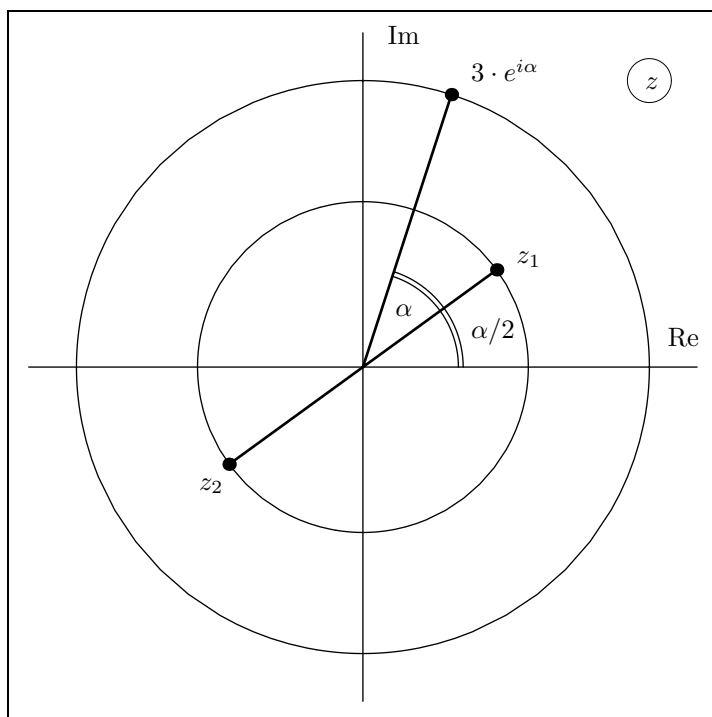


FIG. 3 :
Die Quadratwurzel komplexer
Zahlen

Beispiel Gegeben ist die komplexe Zahl c . Gesucht sind die (alle!) Lösungen der Gleichung $z^n = c$.

Wir betrachten zuerst den Fall $n = 2$ für $c = 3e^{i\alpha}$ (siehe Figur 3). Wir machen den Ansatz $z = \rho \cdot e^{i\varphi}$. Dann folgt

$$z^2 = \rho^2 \cdot e^{i2\varphi} \stackrel{!}{=} 3e^{i\alpha}.$$

Daraus lesen wir als erstes $\rho = \sqrt{3}$ ab. (Beachte, dass ρ als Betrag einer von Null verschiedenen komplexen Zahl positiv sein muss.) Ferner entnehmen wir der Gleichung die Bedingung $2\varphi = \alpha$, wobei diese “modulo 2π ” zu erfüllen ist. Wir erhalten die beiden Lösungen

$$\varphi_1 = \frac{\alpha}{2}, \quad \varphi_2 = \frac{\alpha}{2} + \frac{2\pi}{2}.$$

Damit folgt

$$z_1 = \sqrt{3} \cdot e^{i\frac{\alpha}{2}}, \quad z_2 = \sqrt{3} \cdot e^{i(\frac{\alpha}{2} + \frac{2\pi}{2})}.$$

Wir entnehmen diesem Beispiel, dass die einzige Schwierigkeit zur Lösung von $z^n = c$ offenbar in der Bestimmung des Argumentes der Lösungen liegt. Wir betrachten dazu noch das folgende Beispiel.

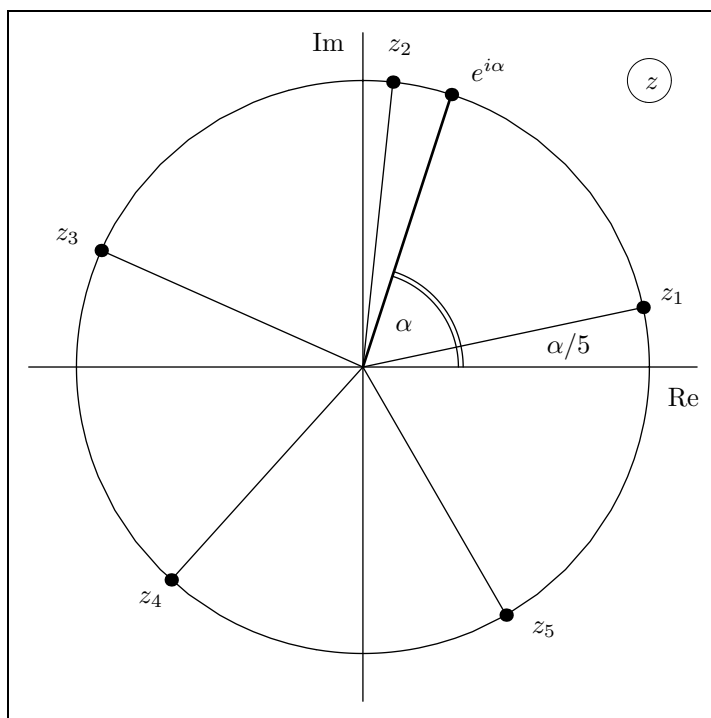


FIG. 4:
Die 5. Wurzel aus einer
komplexen Zahl vom Betrage 1

Beispiel Es sei

$$(1.9) \quad z^n = e^{i\alpha}.$$

Dann gilt natürlich $|z| = 1$ (siehe Figur 4). Mit dem Ansatz

$$z = e^{i\varphi}$$

erhalten wir

$$z^n = e^{in\varphi} \stackrel{!}{=} e^{i\alpha} .$$

Damit ist $n\varphi = \alpha$ “modulo 2π ” zu erfüllen, so dass sich für die Argumente $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ der n Lösungen

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\alpha}{n} , \\ \varphi_2 &= \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{n} 2\pi , \\ \varphi_3 &= \frac{\alpha}{n} + \frac{2}{n} 2\pi , \\ &\vdots \\ \varphi_n &= \frac{\alpha}{n} + \frac{n-1}{n} 2\pi \end{aligned}$$

ergibt. In der komplexen Zahlenebene bilden die n Lösungen der Gleichung (1.9) die Ecken eines regelmässigen n -Eckes, das dem Einheitskreis eingeschrieben ist.