

## 2 Komplexe Zahlen und Funktionen

In einem ersten Teil betrachten wir hier Funktionen, die auf *reellen* Zahlen definiert sind und als Werte *komplexe* Zahlen annehmen.

**Beispiel** Die Funktion

$$\varphi : t \rightarrow \varphi(t) = \cos t + i \sin t, \quad -\infty < t < +\infty$$

ordnet der reellen Zahl  $t$  die komplexe Zahl  $\cos t + i \sin t$  zu.

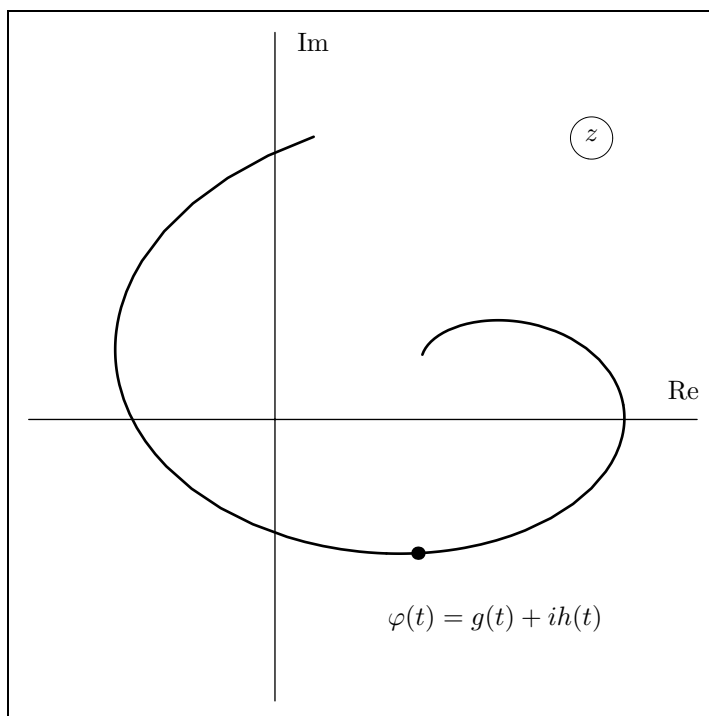


FIG. 1 :  
Komplexwertige Funktion  
einer reellen Variablen

Wir können eine solche Funktion als Abbildung (eines Teils) der reellen Zahlgerade in die komplexe Zahlenebene auffassen. Durch die oben definierte Funktion  $\varphi$  zum Beispiel wird der reellen Zahl  $t$  der Punkt des Einheitskreises in der komplexen Zahlenebene mit dem Argument  $\arg w = t$  zugeordnet. Natürlich können wir eine solche komplexwertige Funktion einer reellen Variablen immer in der Form

$$\varphi : t \rightarrow \varphi(t) = g(t) + ih(t)$$

schreiben, wobei  $g : t \rightarrow g(t)$  und  $h : t \rightarrow h(t)$  “gewöhnliche”, d.h. reellwertige Funktionen der reellen Variablen  $t$  sind (siehe Figur 1).

Die Ableitung  $\varphi'$  der Funktion  $\varphi$  der reellen Variablen  $t$  wird man definieren durch

$$\varphi'(t) = g'(t) + ih'(t);$$

die Ableitungsfunktion  $\varphi'$  ist also wiederum eine komplexwertige Funktion der gleichen reellen Variablen  $t$ .

**Beispiel** Es sei  $\varphi : t \rightarrow \varphi(t) = e^{it}$ . Dann gilt

$$\varphi'(t) = (\cos t + i \sin t)' = -\sin t + i \cos t = i(\cos t + i \sin t) = ie^{it}.$$

Für die Ableitung der Funktion  $t \rightarrow e^{it}$  gilt folglich die von der *reellen* Exponentialfunktion her bekannte Ableitungsregel.

**Beispiel** Es sei  $\psi : t \rightarrow \psi(t) = e^{i\omega t}$ , wo  $\omega$  eine feste reelle Zahl ist. Dann folgt

$$\begin{aligned}\psi'(t) &= i\omega e^{i\omega t}, \\ \psi''(t) &= -\omega^2 e^{i\omega t}\end{aligned}$$

und damit identisch in  $t$

$$\psi''(t) + \omega^2 \psi(t) = 0.$$

Damit ist  $\psi : t \rightarrow e^{i\omega t}$  eine (komplexwertige) Lösung der (reellen) Differentialgleichung

$$\psi'' + \omega^2 \psi = 0.$$

Das bedeutet, dass sowohl der Realteil von  $\psi$ , also  $t \rightarrow \cos(\omega t)$ , wie auch der Imaginärteil von  $\psi$ , also  $t \rightarrow \sin(\omega t)$ , Lösungen der Differentialgleichung sind.

Analoges wie für die Ableitung einer komplexwertigen Funktion einer reellen Variablen gilt auch für das Integral.

**Beispiel** Es sei  $k$  eine ganze Zahl. Dann gilt

$$\int_0^{2\pi} e^{ikx} dx = \int_0^{2\pi} (\cos(kx) + i \sin(kx)) dx = \int_0^{2\pi} \cos(kx) dx + i \int_0^{2\pi} \sin(kx) dx.$$

Da  $k$  ganz ist, folgt

$$\int_0^{2\pi} e^{ikx} dx = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq 0 \\ 2\pi & \text{für } k = 0 \end{cases} .$$

**Beispiel** Es seien  $m, n$  zwei nicht negative ganze Zahlen. Wir berechnen das Integral

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx) \sin(nx) dx$$

mit Hilfe komplexer Zahlen. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos(mx) \sin(nx) dx &= \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{imx} + e^{-imx}}{2} \cdot \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} dx \\ &= \frac{1}{4i} \int_0^{2\pi} (e^{i(m+n)x} - e^{i(m-n)x} + e^{i(n-m)x} - e^{-i(n+m)x}) dx \\ &= \frac{1}{4i} \left[ \int_0^{2\pi} e^{i(m+n)x} dx - \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x} dx + \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x} dx - \int_0^{2\pi} e^{-i(m+n)x} dx \right] . \end{aligned}$$

Daraus erhält man mit einer Fallunterscheidung  $m \neq n, m = n \neq 0, m = n = 0$  mit Hilfe des vorherigen Beispiels das Resultat

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx) \sin(nx) dx = 0 .$$

Auf gleiche Art berechnet man ohne Mühe auch

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx &= \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ \pi & \text{für } m = n \neq 0 , \\ 2\pi & \text{für } m = n = 0 \end{cases} \\ \int_0^{2\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx &= \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ \pi & \text{für } m = n \neq 0 . \\ 0 & \text{für } m = n = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Diese Resultate spielen in der Theorie der **Fourierreihen** eine grosse Rolle (siehe Analysis III); sie heissen **Orthogonalitätsrelationen** und drücken aus, dass die Funktionen  $x \rightarrow \cos(mx)$ ,  $m = 0, 1, \dots$ ,  $x \rightarrow \sin(nx)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  ein “orthogonales Funktionensystem” in einem entsprechenden “Funktionsraum” bilden.

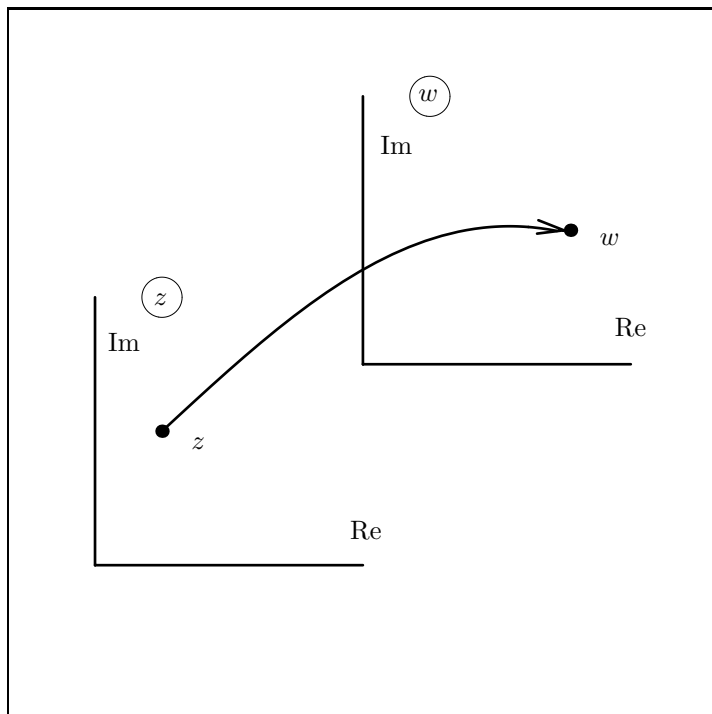


FIG. 2:  
Komplexwertige Funktion  
einer komplexen Variablen

Im ersten Teil dieses Abschnitts haben wir komplexwertige Funktionen einer reellen Variablen betrachtet. Jetzt wollen wir uns Funktionen zuwenden, bei denen sowohl der Definitionsbereich wie auch der Wertebereich in der komplexen Zahlenebene liegen (siehe Figur 2).

**Beispiel** Die Funktion

$$f : z \rightarrow w = f(z) = iz$$

ordnet der komplexen Zahl  $z$  die komplexe Zahl  $w, w = iz$  zu. Um sich diese Funktion zu veranschaulichen fassen wir sie als Abbildung von der komplexen  $z$ -Ebene in die komplexe  $w$ -Ebene auf. Wegen  $|w| = |iz| = |z|$  und  $\arg w = \arg(iz) = \arg z + \pi/2$  folgt, dass der Funktion eine Drehung der komplexen Zahlenebene um den Winkel  $\pi/2$  entspricht.

**Beispiel** Der Funktion

$$f : z \rightarrow w = f(z) = z \cdot e^{i\alpha}$$

entspricht einer Drehung der komplexen Zahlenebene um den Winkel  $\alpha$  (siehe Figur 3).

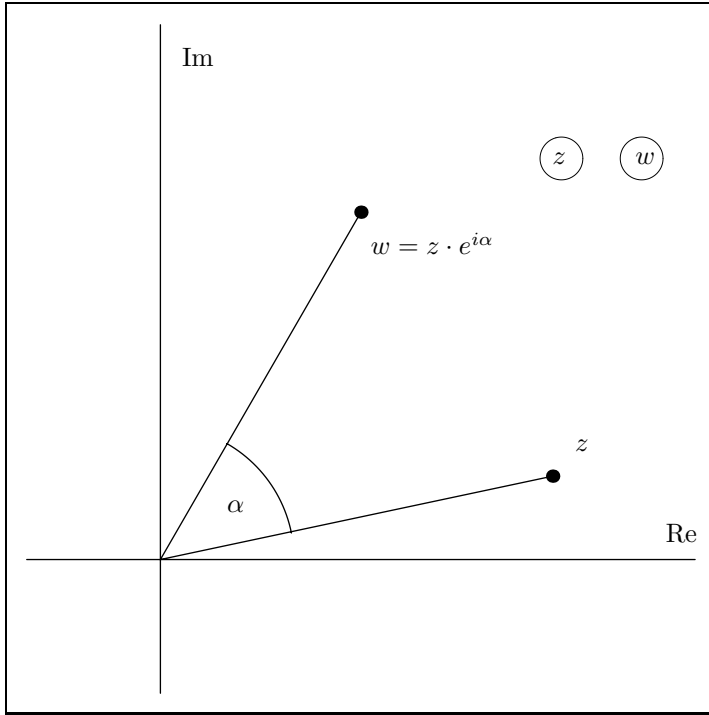


FIG. 3 :  
Der Multiplikation mit einer  
komplexen Zahl vom Betrage 1  
entspricht eine Drehung der  
komplexen Zahlenebene

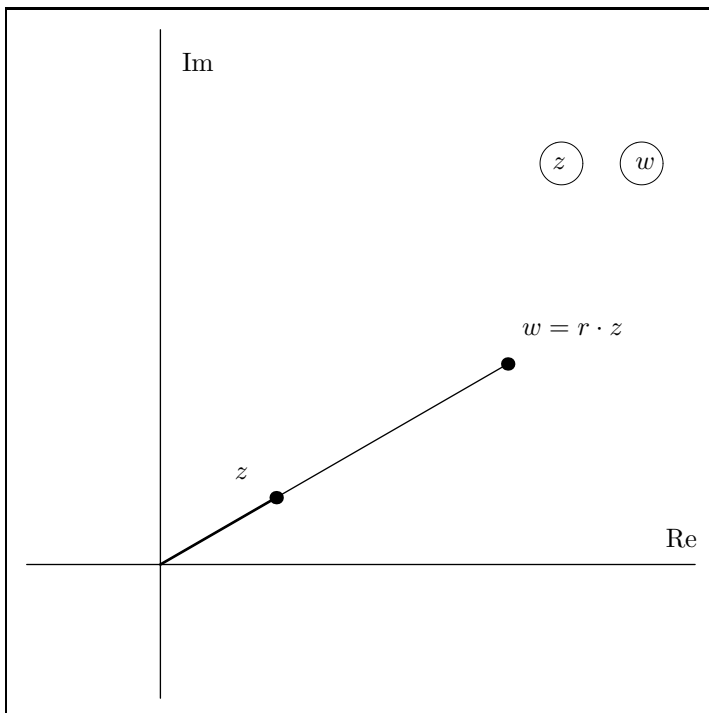


FIG. 4 :  
Der Multiplikation mit einer  
reellen Zahl  $r$  entspricht eine  
Streckung der komplexen  
Zahlenebene

**Beispiel** Der Funktion

$$g : z \rightarrow w = g(z) = r \cdot z, \quad r \in \mathbb{R}$$

entspricht einer Streckung der komplexen Zahlenebene um den Faktor  $r$  (siehe Figur 4).

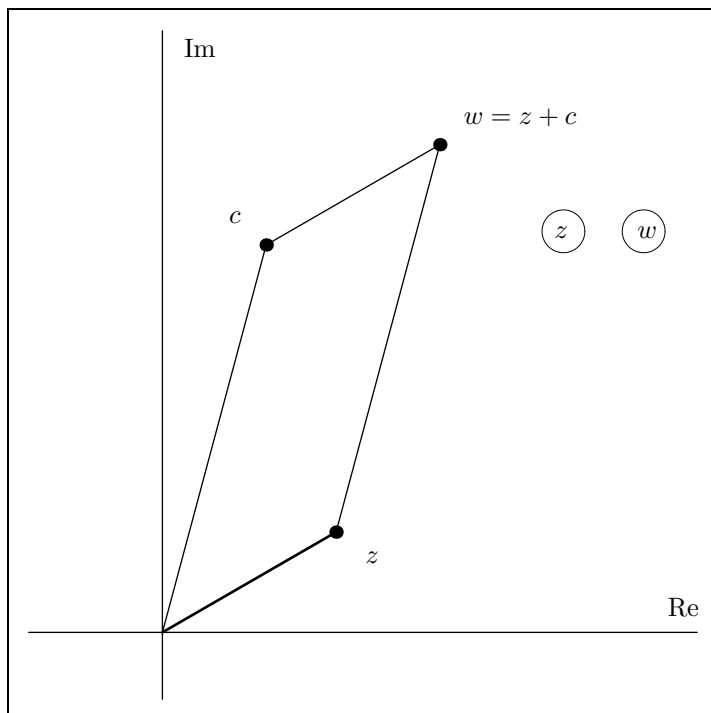


FIG. 5:  
Der Addition einer komplexen  
Zahl entspricht eine Translation  
der komplexen Zahlenebene

**Beispiel** Der Funktion

$$h : z \rightarrow z + c, \quad c \in \mathbb{C}$$

entspricht einer Translation der komplexen Zahlenebene um den “Vektor”  $c$  (siehe Figur 5).

**Beispiel** Wir betrachten als nächstes die etwas kompliziertere Funktion

$$z \rightarrow w = e^z,$$

wobei wir  $z = a + ib$   $a, b \in \mathbb{R}$  setzen

$$e^z = e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b).$$

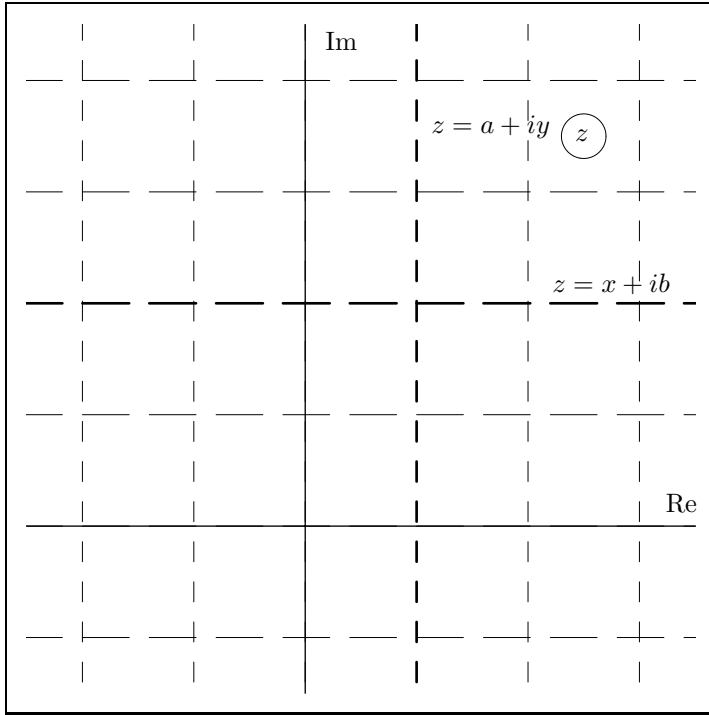


FIG. 6:  
Das Netz der Parallelgeraden  
zur reellen bzw. imaginären  
Achse in der komplexen  
Zahlebene

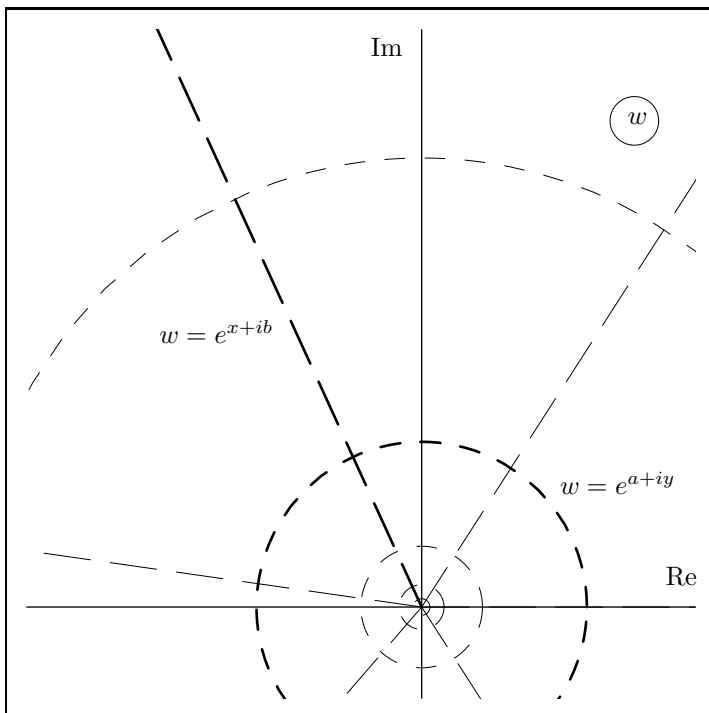


FIG. 7:  
Das Bild unter der  
Exponentialfunktion  $z \rightarrow e^z$  des  
Netzes der Parallelgeraden zur  
reellen bzw. imaginären Achse  
in der komplexen Zahlebene

Um uns einen Überblick über das Verhalten dieser Funktion zu verschaffen, betrachten wir das Koordinatennetz in der  $z$ -Ebene und untersuchen sein Bild in der  $w$ -Ebene (siehe Figuren 6,7). Eine Parallelgerade zur reellen Achse in der  $z$ -Ebene wird durch die Gleichung  $z = x + ib$ ,  $-\infty < x < +\infty$  beschrieben. Ihr Bild in der  $w$ -Ebene ist

$$w = e^x \cdot e^{ib} = e^x(\cos b + i \sin b) ,$$

ein von 0 ausgehender Strahl mit  $\arg w = b$ . Eine Parallelgerade zur imaginären Achse in der  $z$ -Ebene wird durch die Gleichung  $z = a + iy$ ,  $-\infty < y < +\infty$  beschrieben. Ihr Bild in der  $w$ -Ebene ist

$$w = e^a \cdot e^{iy} = e^a(\cos y + i \sin y) ,$$

ein Kreis um 0 mit Radius  $e^a$ . Das Bild des Koordinatennetzes in der  $z$ -Ebene besteht also aus den von 0 ausgehenden Strahlen und den Kreisen um 0. Man beachte ferner, dass jeder Parallelstreifen zur reellen Achse in der  $z$ -Ebene der Breite  $2\pi$  auf die *ganze*  $w$ -Ebene abgebildet wird.

Speziell hinweisen möchten wir auf das Phänomen, dass das Bild des Koordinatennetzes in der  $z$ -Ebene in ein Netz von Kurven abgebildet wird, welche sich *orthogonal* schneiden.

Letzteres ist nicht nur für die durch die Funktion  $z \rightarrow e^z$  vermittelte Abbildung der Fall, sondern ganz allgemein für Abbildungen, die zu sogenannten *analytischen Funktionen* gehören. (Auf die Definition des Begriffes “analytisch” gehen wir hier nicht ein.) Man kann zeigen, dass solche Funktionen sogar Abbildungen liefern, die winkeltreu sind; man nennt Abbildungen mit dieser Eigenschaft auch etwa *konform*. In der mathematischen Behandlung der Strömungslehre (Hydro- und Aerodynamik) spielen konforme Abbildungen der Ebene eine grosse Rolle; deshalb hat der Zweig der Mathematik, welcher sich mit analytischen Funktionen beschäftigt, die sogenannte *komplexe Funktionentheorie*, im Gebiet der Strömungslehre viele wichtige Anwendungen gefunden.

**Beispiel** Gegeben sei die Funktion  $z \rightarrow w = f(z) = z^2$ .

Wiederum studieren wir die Funktion, indem wir das Bild des  $z$ -Koordinatennetzes in der  $w$ -Ebene untersuchen (siehe Figur 8). Für  $z = a + ib$  erhalten wir

$$f(z) = (a^2 - b^2) + i2ab .$$

Die Bildkurve der Parallelgeraden  $z = t + ib$ ,  $-\infty < t < +\infty$  zur reellen Achse ist also durch die Parameterdarstellung ( $w = \xi(t) + i\eta(t)$ )

$$\begin{aligned} t &\rightarrow \xi(t) = t^2 - b^2 , \\ t &\rightarrow \eta(t) = 2tb \end{aligned}$$



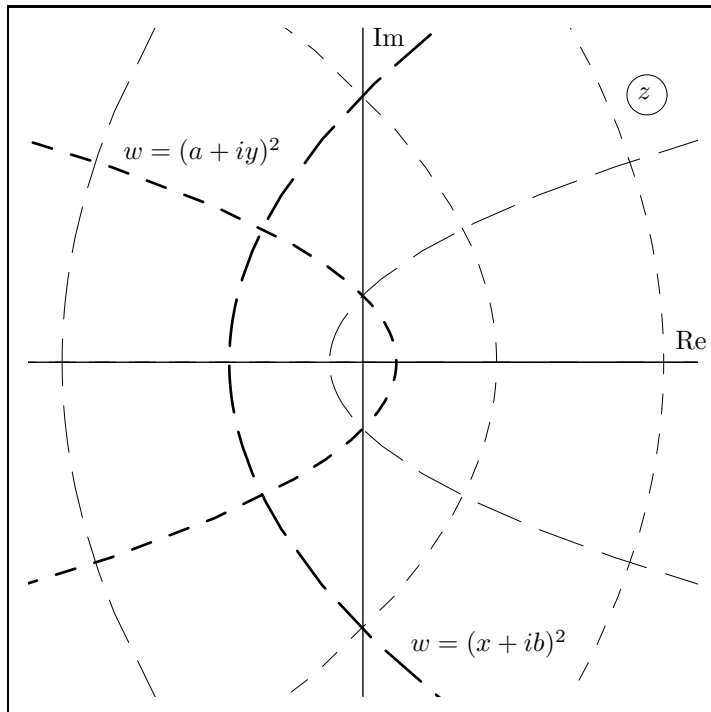


FIG. 8:  
Das Bild unter der Funktion  
 $z \rightarrow z^2$  des Netzes der  
Parallelgeraden zur reellen bzw.  
imaginären Achse in der  
komplexen Zahlenebene

gegeben. Eliminieren wir  $t$ , so erhalten wir als Gleichung der Bildkurve

$$\xi = \frac{\eta^2}{4b^2} - b^2.$$

Die Bildkurve der Parallelgeraden  $z = t + ib$  zur reellen Achse der  $z$ -Ebene ist eine nach rechts geöffnete Parabel, deren Scheitel bei  $(-b^2, 0)$  liegt. Analog zeigt man, dass das Bild der Parallelgeraden  $z = a + it$ ,  $-\infty < t < +\infty$  zur imaginären Achse der  $z$ -Ebene eine Parabel ist, die nach links geöffnet ist und deren Scheitel bei  $(a^2, 0)$  liegt.

Man stellt fest, dass sich die so erhaltenen Kurven in der  $w$ -Ebene *orthogonal* schneiden; die Funktion  $z \rightarrow z^2$  ist eben auch “analytisch” wie die im obigen Beispiel betrachtete Funktion  $z \rightarrow e^z$ .