

6 Einige weitere Beispiele

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns im wesentlichen mit den Integralen über Potenzen der Sinus- bzw. der Cosinus-Funktion und mit Integralen über rationale Funktionen. In beiden Gebieten begnügen wir uns mit Beispielen.

In Anwendungen treten oft die bestimmten Integrale

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx, \quad J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$$

für $n = 0, 1, 2, \dots$ auf. Diese Integrale wollen wir im ersten Teil dieses Abschnittes berechnen.

Wir beschäftigen uns zuerst mit dem unbestimmten Integral

$$\int \sin^n x \, dx.$$

Für kleine Werte von n ist uns das Resultat natürlich bekannt; wir haben

$$\begin{aligned} n = 0 & : \int 1 \, dx = x + C \\ n = 1 & : \int \sin x \, dx = -\cos x + C \\ n = 2 & : \int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C \end{aligned}$$

Eine Stammfunktion für $x \rightarrow \sin^n x$ in geschlossener Form anzugeben ist – wie man ohne grosse Mühe einsieht – nicht einfach. Hingegen lässt sich sehr leicht eine *Rekursionsformel* angeben. Dazu behandeln wir das Integral

$$\int \sin^n x \, dx = \int \sin^{n-1} x \sin x \, dx$$

mit partieller Integration; wir setzen

$$\begin{aligned} u'(x) &= \sin x, & u(x) &= -\cos x, \\ v(x) &= \sin^{n-1} x, & v'(x) &= (n-1) \sin^{n-2} x \cos x. \end{aligned}$$

Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\int \sin^n x \, dx &= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx \\ &= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \left(\int \sin^{n-2} x \, dx - \int \sin^n x \, dx \right) .\end{aligned}$$

Die Gleichung lässt sich natürlich auflösen:

$$\int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx .$$

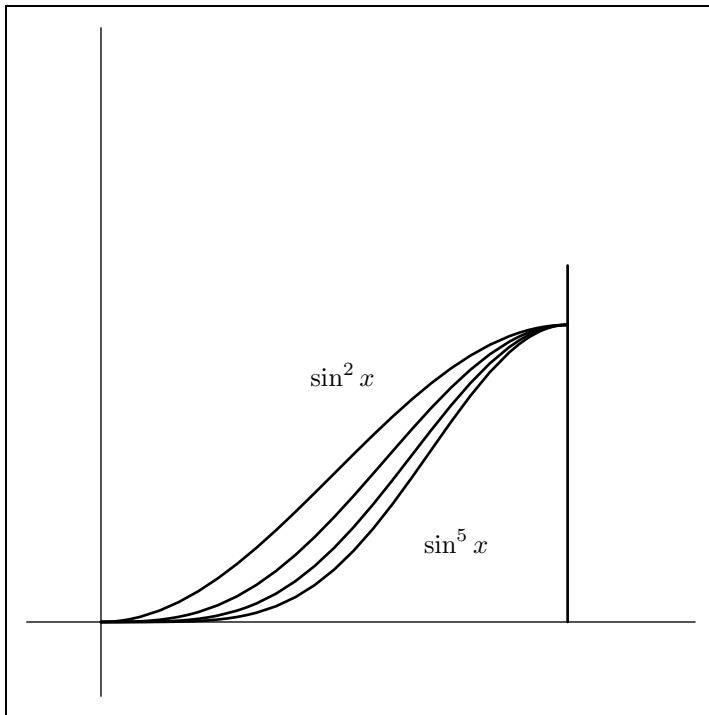


FIG. 1 :
Potenzen von $\sin x$

Man kann diese Formel verwenden, um *rekursiv* die Folge der Stammfunktionen von $x \rightarrow \sin^n x$ zu berechnen. Wir überlassen dies dem Leser und wollen hier zum ursprünglich gestellten Problem zurückkehren, nämlich zum Problem, die bestimmten Integrale (siehe Figur 1)

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx \quad \text{und} \quad J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$$

zu berechnen. Wie bemerken als erstes, dass der Graph von $x \rightarrow \sin^n x$ durch Spiegelung an der Senkrechten $x = \pi/4$ in den Graphen von $x \rightarrow \cos^n x$ übergeht (siehe Figur 2). Daraus folgt sofort $I_n = J_n$. Es genügt also I_n auszurechnen. Nach obigem gilt

$$I_0 = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = 1,$$

und aus der Rekursionsformel erhalten wir

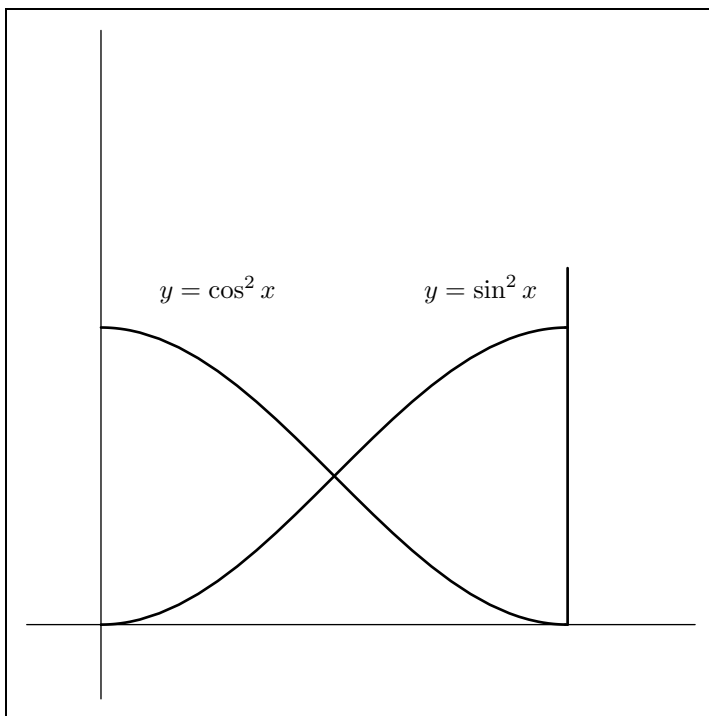


FIG. 2:
Symmetrie

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \left[-\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x \right]_0^{\pi/2} + \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \, dx = \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}.$$

Mit Hilfe dieser Formel lassen sich die Werte I_n sogar in geschlossener Form angeben. Offenbar haben wir zwischen geraden und ungeraden Indizes n zu unterscheiden:

$$I_0 = \frac{\pi}{2}, \quad I_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad I_4 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad I_6 = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, \dots$$

$$I_{2k} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots 2k} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 = 1, \quad I_3 = \frac{2}{3}, \quad I_5 = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}, \quad I_7 = \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}, \dots$$

$$I_{2k+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots 2k}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2k+1)}$$

Aus diesen Resultaten lässt sich eine überraschende und historisch interessante Formel herleiten, nämlich die Formel von Wallis (J. Wallis 1616-1703).

Im Intervall $[0, \pi/2]$ gilt natürlich die Ungleichung $0 \leq \sin x \leq 1$. Daraus folgt für $k = 1, 2, 3, \dots$

$$\sin^{2k-1} x \geq \sin^{2k} x \geq \sin^{2k+1} x$$

und durch Integration $I_{2k-1} \geq I_{2k} \geq I_{2k+1}$. Division durch den (positiven) Wert I_{2k+1} liefert

$$\frac{I_{2k-1}}{I_{2k+1}} \geq \frac{I_{2k}}{I_{2k+1}} \geq 1.$$

Nun gilt nach unserer Rekursionsformel

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} I_{2k-1},$$

so dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{I_{2k-1}}{I_{2k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k+1}{2k} = 1.$$

Daraus folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{I_{2k}}{I_{2k+1}} = 1,$$

d.h.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdots (2k-1)(2k-1)(2k+1)}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdots (2k)(2k)} \frac{\pi}{2} = 1.$$

Dies liefert unmittelbar die überraschende Formel von Wallis

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdots (2k)(2k)}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdots (2k-1)(2k-1)(2k+1)} = \frac{\pi}{2},$$

welche auf merkwürdige Weise die geraden und die ungeraden ganzen Zahlen mit der irrationalen Zahl π in Verbindung bringt.

Beispiel Das Integral

$$I = \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

tritt bei der Berechnung des Flächenträgheitsmomentes einer Kreisscheibe um ihren Durchmesser auf. Die Substitution $x = a \sin t$, $dx = a \cos t dt$ mit gleichzeitiger Transformation der Integrationsgrenzen liefert

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} a^2 \sin^2 t a^2 \cos^2 t dt \\ &= a^4 \int_0^{\pi/2} (\sin^2 t - \sin^4 t) dt \\ &= a^4 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{16} a^4. \end{aligned}$$

Im Rest dieses Abschnittes beschäftigen wir uns noch mit der Integration von *rationalen Funktionen*. Für dieses Gebiet gibt es eine ausgebaute Theorie. Wir wollen uns in dieser Vorlesung aber mit einigen Beispielen begnügen.

Beispiel Es ist das Integral

$$\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 5}$$

zu berechnen.

Man sieht leicht, dass die quadratische Nennerfunktion die Nullstellen 5 und 1 hat. Die hier nicht behandelte Theorie der Partialbrüche besagt, dass sich die rationale Funktion

$$\frac{1}{x^2 - 6x + 5}$$

in der Form

$$\frac{A}{x - 5} + \frac{B}{x - 1}$$

mit reellen Zahlen A und B schreiben lässt. Diese Zahlen lassen sich aus der Identität

$$\frac{1}{x^2 - 6x + 5} \equiv \frac{A}{x - 5} + \frac{B}{x - 1}$$

leicht bestimmen. Bringt man nämlich die rechte Seite auf einen einzigen Bruchstrich, so erhält man

$$\frac{1}{x^2 - 6x + 5} \equiv \frac{A(x - 1) + B(x - 5)}{(x - 5)(x - 1)}.$$

Die Tatsache, dass die Zählerfunktionen links und rechts übereinstimmen müssen, liefert für A und B die Gleichungen

$$\left| \begin{array}{rcl} A & + & B & = & 0 \\ -A & - & 5B & = & 1 \end{array} \right|.$$

Daraus ergibt sich sofort $A = 1/4$, $B = -1/4$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2 - 6x + 5} dx &= \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-1} \right) dx \\
&= \frac{1}{4} (\log |x-5| - \log |x-1|) + C \\
&= \log \left| \frac{x-5}{x-1} \right|^{1/4} + C .
\end{aligned}$$

Beispiel Es ist das Integral

$$\int \frac{3x-1}{x^2-x+1} dx$$

zu berechnen.

In einem ersten Schritt versucht man das Problem auf eine rationale Funktion zu reduzieren, deren Zähler eine Konstante ist. Wegen $(x^2 - x + 1)' = 2x - 1$ erhält man

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x-1}{x^2-x+1} dx &= \frac{3}{2} \int \frac{2x - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}{x^2-x+1} dx \\
&= \frac{3}{2} \int \left(\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{\frac{1}{3}}{x^2-x+1} \right) dx \\
&= \frac{3}{2} \log |x^2-x+1| + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2-x+1} dx .
\end{aligned}$$

Für die Behandlung des verbleibenden Integrals stellt man fest, dass die Nennerfunktion *keine* reellen Nullstellen hat. Man versucht deshalb dieses Integral auf den Standardtyp dieser Art, nämlich auf $\int 1/(u^2 + 1) du$ zurückzuführen. Dies geschieht mit Hilfe der sogenannten *quadratischen Ergänzung*:

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \left(\left(\frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)^2 + 1 \right) .$$

Macht man im Integral

$$\int \frac{1}{x^2-x+1} dx = \frac{4}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)^2 + 1} dx$$

die Substitution

$$u = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2} \right), \quad du = \frac{2}{\sqrt{3}} dx ,$$

so erhält man

$$\frac{4}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{1}{u^2 + 1} du = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan u + C .$$

Die Rücksubstitution liefert schliesslich

$$\int \frac{1}{x^2 - x + 1} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2} \right) \right) + C ,$$

was man leicht durch Ableiten bestätigt.