

9 Volumenberechnung

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit der Volumenberechnung beschäftigen. Wir nehmen an, dass uns eine Beschreibung des Körpers im (x, y, z) -Koordinatensystem vorliegt. Ferner nehmen wir an, dass der Flächeninhalt der Schnittfigur mit einer zur (y, z) -Ebene parallelen Ebene durch die stetige Funktion $x \rightarrow F(x)$ gegeben sei. Um das Volumen des Körpers zu berechnen, wählen wir auf der x -Achse eine Einteilung

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

mit Zwischenpunkten $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ und zerlegen den Körper durch Schnitte parallel zur (y, z) -Ebene an den Stellen x_k , $k = 0, 1, \dots, n$ in Scheiben. Das Volumen V des zwischen der x -Koordinate a und der x -Koordinate b liegenden Teils ist dann näherungsweise durch die Riemann'sche Summe (siehe Figur 1)

$$\sum_{k=1}^n F(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

gegeben. Der Grenzübergang über eine Folge von Einteilungen, deren Feinheit gegen Null strebt, liefert das Integral

$$V = \int_a^b F(x) dx$$

das **Volumen** des zwischen den x -Koordinaten a und b liegenden Teils des Körpers.

Beispiel Das Volumen des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

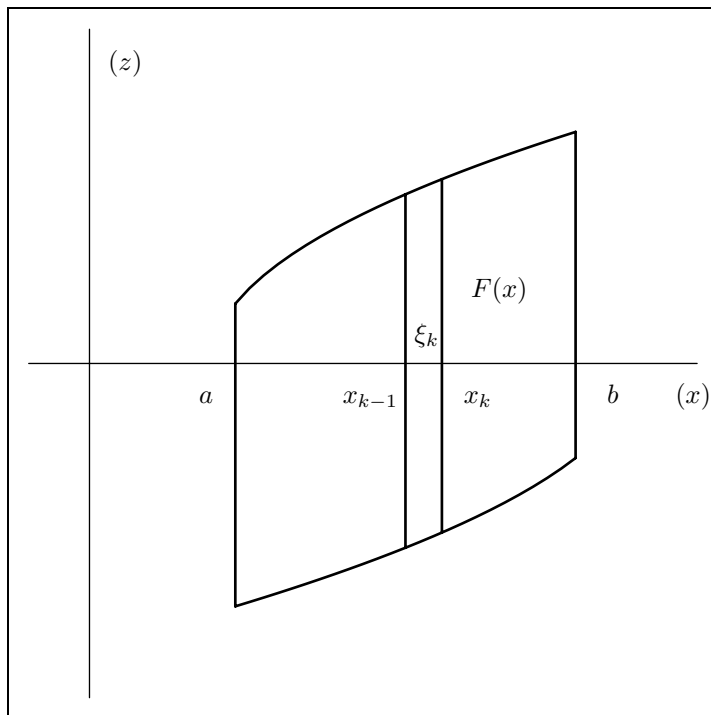
ist gesucht.

Wir schneiden den Körper mit der Ebene $x = x_0$. Als Schnittfigur erhalten wir

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x_0^2}{a^2},$$

$$\frac{y^2}{b^2 (1 - x_0^2/a^2)} + \frac{z^2}{c^2 (1 - x_0^2/a^2)} = 1.$$

Dies ist für $-a \leq x_0 \leq a$ eine Ellipse mit Halbachsen

FIG. 1:
Volumen

$$b\sqrt{1 - x_0^2/a^2} \quad , \quad c\sqrt{1 - x_0^2/a^2}$$

in Richtung der y - bzw. z -Achse. Der Flächeninhalt der ellipsenförmigen Schnittfigur ist nach einem früheren Resultat

$$F(x_0) = \pi bc \left(1 - x_0^2/a^2\right) .$$

Das Volumen des Ellipsoides berechnet sich dann wie folgt:

$$V = 2 \int_0^a \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = 2\pi bc \left[x - \frac{x^3}{3a^2} \right]_0^a = \frac{4}{3} \pi abc .$$

Bemerkung Wie man sich erinnert, wurde der Flächeninhalt einer Ellipse seinerzeit ebenfalls mit Hilfe der Integralrechnung hergeleitet. Dies ist typisch für die Volumenberechnung: der Flächeninhalt der Schnittfigur ist im allgemeinen wiederum durch ein Integral gegeben; man hat eigentlich ein mehrfaches Integral vor sich.

Beispiel Gegeben ist ein auf der (x, y) -Ebene stehender gerader Kreiszylinder mit Grundkreis $x^2 + y^2 = r^2$. Er werde durch die Ebene

$$z = \frac{h}{r+b}(x+b), \quad 0 \leq b \leq r$$

abgeschnitten (siehe Figur 2). Was ist das Volumen des zwischen der (x, y) -Ebene und der Schnittebene liegenden Stückes (Zylinderhuf)?

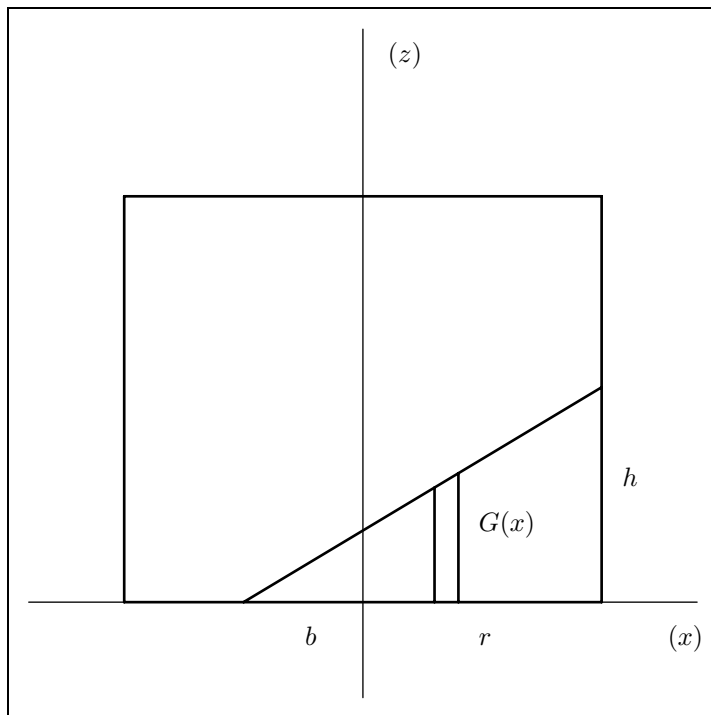


FIG. 2:
Zylinderhuf

Wir schneiden den Körper durch eine zur (y, z) -Ebene parallelen Ebene. Die Schnittfigur ist ein Rechteck, es hat den Flächeninhalt

$$G(x) = \left(2\sqrt{r^2 - x^2}\right) \left(\frac{h}{r+b}(x+b)\right).$$

Das Volumen ergibt sich dann wie folgt

$$\begin{aligned} V &= \int_{-b}^r G(x) dx \\ &= \frac{2h}{r+b} \int_{-b}^r (x+b) \sqrt{r^2 - x^2} dx \\ &= \frac{h}{r+b} \int_{-b}^r 2x \sqrt{r^2 - x^2} dx + \frac{2hb}{r+b} \int_{-b}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx. \end{aligned}$$

Da der Integrand im ersten Integral ungerade ist, darf man die untere Grenze $-b$ durch $+b$ ersetzen. Die Substitutionen $r^2 - x^2 = u$, $-2xdx = du$ im ersten und $x = ru$, $dx = rdu$ im zweiten Integral liefern dann

$$\begin{aligned} V &= -\frac{h}{r+b} \int_{r^2-b^2}^0 u^{1/2} du + \frac{2hb}{r+b} r^2 \int_{-b/r}^1 \sqrt{1-u^2} du \\ &= \frac{2}{3} \frac{h}{r+b} (r^2 - b^2)^{3/2} + \frac{hbr^2}{r+b} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{-b}{r}\right) + \frac{b}{r} \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2}} \right). \end{aligned}$$

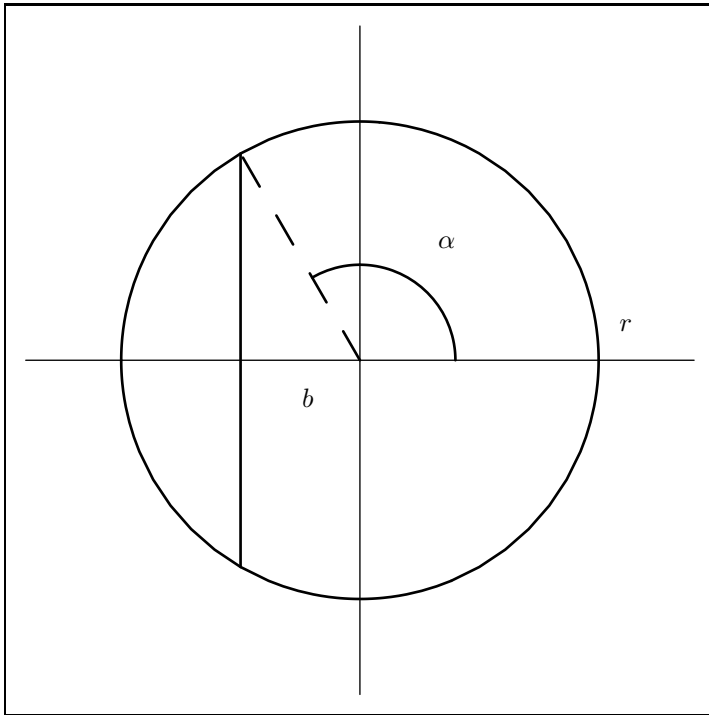


FIG. 3:
Zum Winkel α

Der durch $\alpha = \pi/2 - \arcsin(-b/r) = \pi/2 + \arcsin(b/r)$ gegebene Winkel hat eine offensichtliche geometrische Bedeutung (siehe Figur 3). Mit dieser Bezeichnung erhalten wir

$$V = \sqrt{r^2 - b^2} \frac{h}{r+b} \left(\frac{2}{3} r^2 + \frac{1}{3} b^2 \right) + \frac{hbr^2}{r+b} \alpha.$$