

13 Uneigentliche Integrale

Das Symbol

$$\int_a^b f(x)dx$$

haben wir im Abschnitt 1 unter zwei Voraussetzungen definiert, nämlich:

- (a) das Intervall $[a, b]$ ist endlich;
- (b) der Integrand $x \rightarrow f(x)$ ist in $[a, b]$ stetig.

Beispiele zeigen, dass das übliche Vorgehen bei der Berechnung bestimmter Integrale auf falsche Resultate führen kann, wenn man etwa von der zweiten Voraussetzung abgeht. Hier wollen wir versuchen, die Voraussetzungen abzuschwächen, indem wir den Begriff des bestimmten Integrals sorgfältig erweitern.

Wir wenden uns zuerst den sogenannten **uneigentlichen Integralen 2. Gattung** zu (die Terminologie ist historisch bedingt und leider wiederum recht unglücklich). In solchen Integralen ist zwar der Integrand stetig, aber das Integrationsintervall unendlich, etwa $[a, \infty)$. Für ein Integral dieser Art definieren wir

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \int_a^\xi f(x)dx .$$

Das uneigentliche Integral *existiert* (*konvergiert*), wenn der Limes auf der rechten Seite existiert; der Wert des Integrals ist in diesem Fall gleich dem Wert des Limes. Analog geht man vor, wenn das Integrationsintervall von der Form $(-\infty, b]$ ist.

Beispiel (siehe Figur 1)

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \int_0^\xi \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \left([\arctan x]_0^\xi \right) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} (\arctan \xi - \arctan 0) = \pi/2$$

Beispiel (siehe Figur 2)

$$\int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \int_0^\xi e^{-x} dx = \lim_{\xi \rightarrow \infty} (-e^{-\xi} + e^{-0}) = 1$$

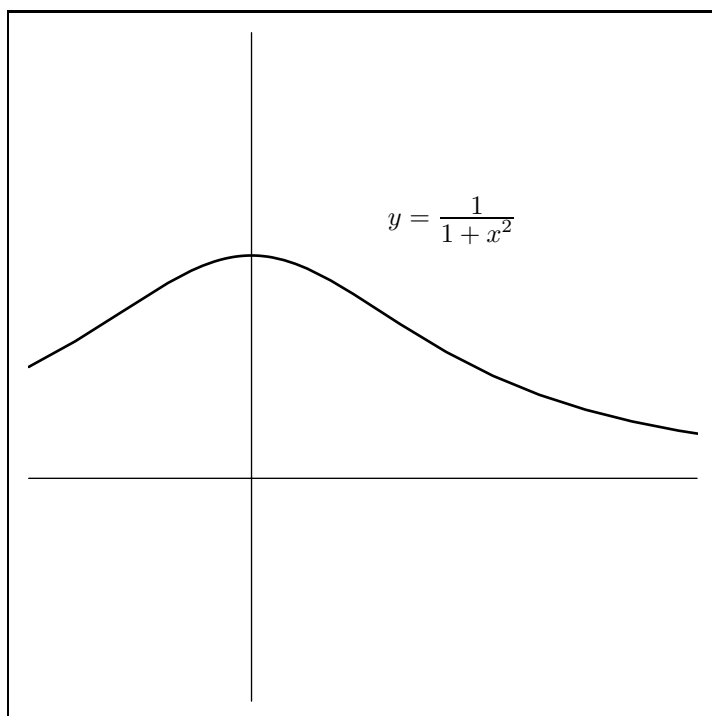


FIG. 1:
Die Funktion

$$x \rightarrow \frac{1}{1+x^2}$$

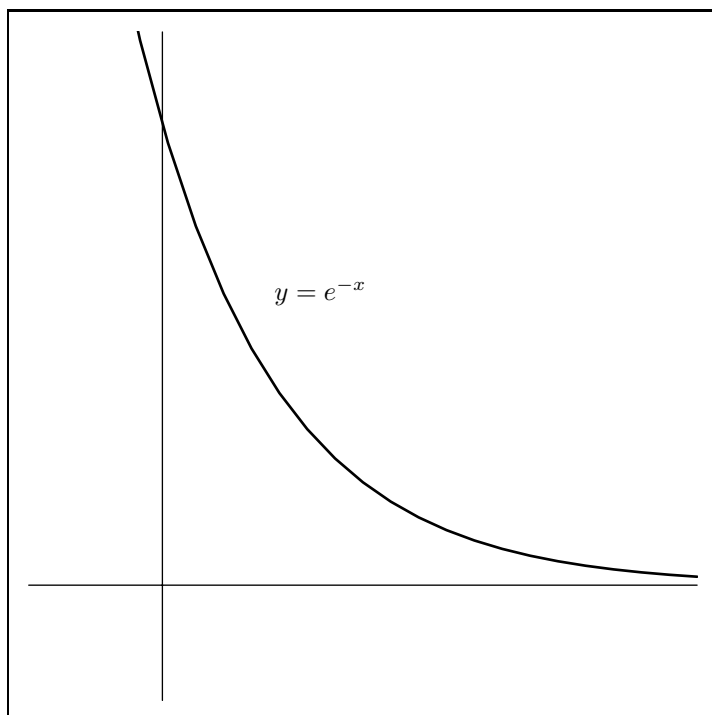


FIG. 2:
Die Funktion

$$x \rightarrow e^{-x}$$

Beispiel

$$\int_0^\infty \sin x \, dx = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \int_0^\xi \sin x \, dx = \lim_{\xi \rightarrow \infty} (-\cos \xi + \cos 0) \text{ existiert nicht!}$$

Beispiel Uneigentliche Integrale 2. Gattung treten in Anwendung öfter auf. Wir berechnen die Fluchtgeschwindigkeit aus dem Gravitationsfeld einer homogenen Kugel. Die Gravitationskraft einer homogenen Kugel der Masse M auf einen Massenpunkt der Masse m im Abstand r vom Mittelpunkt (und ausserhalb) der Kugel ist gegeben durch

$$K(r) = -k \frac{M \cdot m}{r^2},$$

wo k die Gravitationskonstante ist. Für die Fluchtgeschwindigkeit v eines Massenpunktes im Abstand R vom Mittelpunkt der Kugel muss die Gleichung

$$\frac{1}{2}mv^2 = \int_R^\infty k \frac{mM}{r^2} \, dr$$

(Gleichsetzung der kinetischen und der potentiellen Energie) erfüllt sein. Daraus folgt

$$\frac{1}{2}v^2 = kM \int_R^\infty \frac{1}{r^2} \, dr = kM \lim_{\xi \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{r} \right]_R^\xi = kM \frac{1}{R},$$

also

$$v = \left(\frac{2kM}{R} \right)^{1/2}.$$

Im Folgenden wollen wir die Diskussion ganz auf den Fall von positiven, monoton fallenden Funktionen beschränken. Ist f eine solche Funktion, so ergibt sich aus der Definition sofort, dass das uneigentliche Integral

$$\int_a^\infty f(x) \, dx$$

nur existieren kann, wenn $f(x)$ für $x \rightarrow \infty$ gegen Null strebt. Diese Bedingung ist aber *nicht* hinreichend, wie das folgende Beispiel zeigt!

Beispiel (siehe Figur 3)

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} \, dx = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \int_1^\xi \frac{1}{x} \, dx = \lim_{\xi \rightarrow \infty} (\log \xi - \log 1) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \log \xi \text{ existiert nicht!}$$

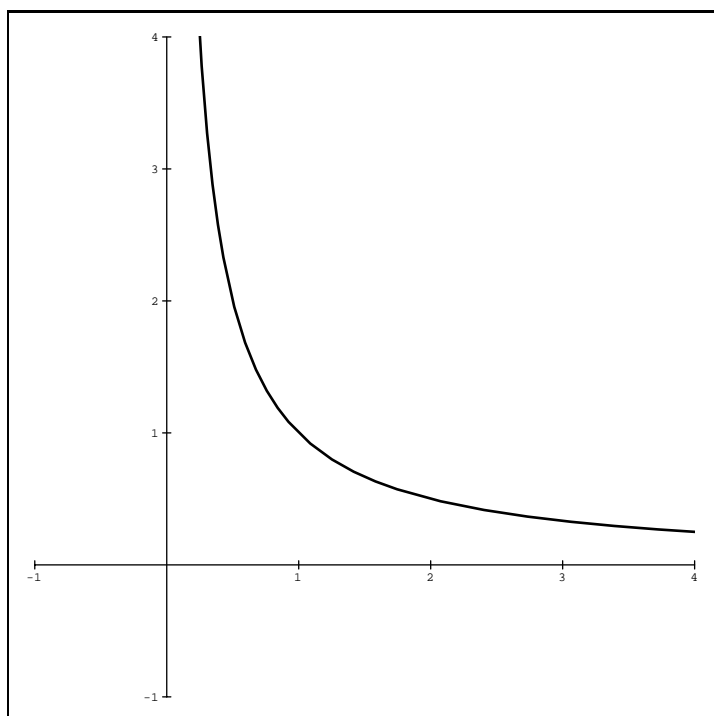


FIG. 3:
Die Funktion

$$x \rightarrow 1/x$$

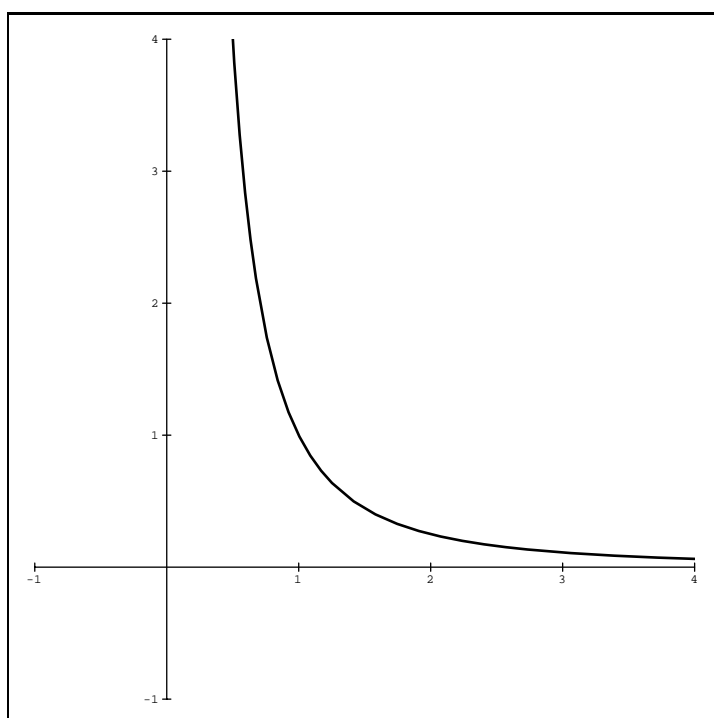


FIG. 4:
Die Funktion

$$x \rightarrow 1/x^2$$

Beispiel (siehe Figur 4) Es sei $0 < k < \infty$, $k \neq 1$.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^k} dx = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \int_1^\xi \frac{1}{x^k} dx = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{1-k} \left(\frac{1}{\xi^{k-1}} - 1 \right) .$$

Dieser Limes existiert für $k > 1$, er existiert *nicht* für $0 < k < 1$.

Begegnet man im Laufe einer Rechnung einem uneigentlichen Integral, so muss man sich als erstes über dessen Existenz Klarheit verschaffen. Existiert das Integral nämlich nicht, so handelt es sich um ein leeres Symbol, und ein Weiterrechnen kann zu falschen Resultaten führen. Der Mathematiker kennt eine ganze Anzahl von sogenannten Vergleichskriterien, die einem die Untersuchung von uneigentlichen Integralen erleichtern. Wir wollen auf diese Kriterien hier nicht eingehen, aber an einem Beispiel illustrieren, wie Vergleiche des Integranden mit gut bekannten Funktionen in diesem Zusammenhang nützlich sind.

Beispiel Wir fragen nach der Existenz bzw. Nichtexistenz des uneigentlichen Integrals (siehe Figur 5)

$$\int_1^\infty e^{-x^2} dx .$$

Ausgehend nur von der Definition des uneigentlichen Integrals kann dieses *nicht* auf Existenz untersucht werden, weil die Stammfunktion von $x \rightarrow e^{-x^2}$ nicht elementar ausdrückbar ist. Wir müssen also auf andere Weise vorgehen. Die Frage - geometrisch interpretiert - lautet, ob die Fläche zwischen 1 und ∞ unter dem Graphen von $x \rightarrow e^{-x^2}$ endlich oder unendlich ist. Zu diesem Zweck vergleichen wir diese Funktion mit $x \rightarrow e^{-x}$. Offensichtlich gilt für $x \geq 1$ die Ungleichung

$$0 < e^{-x^2} \leq e^{-x} .$$

Daraus folgt für jedes $\xi \geq 1$

$$0 \leq \int_1^\xi e^{-x^2} dx \leq \int_1^\xi e^{-x} dx = -e^{-\xi} + e^{-1} < e^{-1} .$$

Nun ist aber

$$\int_1^\xi e^{-x^2} dx$$

in ξ monoton wachsend. Da es durch $1/e$ beschränkt ist, muss der Limes

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \int_1^\xi e^{-x^2} dx$$

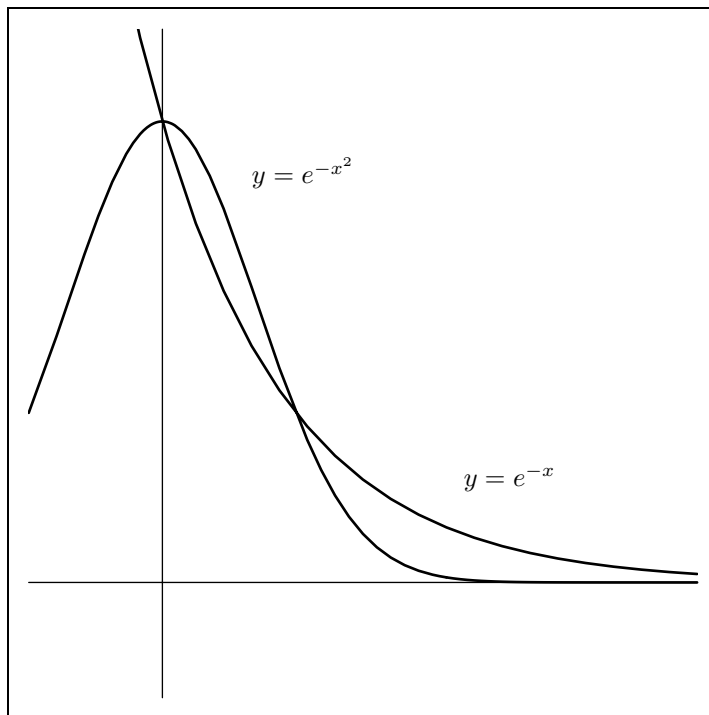


FIG. 5:
Die Funktionen

$$x \rightarrow e^{-x^2}$$

$$x \rightarrow e^{-x}$$

existieren. Unser uneigentliches Integral existiert deshalb. Dank dem Vergleich des Integranden mit einer einfacheren Funktion ist es uns gelungen, dies nachzuweisen, obschon die Stammfunktion nicht elementar ausdrückbar ist. Wir bemerken noch, dass wegen

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^\infty e^{-x^2} dx$$

auch das Integral

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

existiert. Dessen Wert werden wir später explizit berechnen. Dieses Integral spielt in der Wahrscheinlichkeitstheorie eine zentrale Rolle.

Wir wenden uns jetzt den **uneigentlichen Integralen 1. Gattung** zu. Bei diesen ist das Integrationsintervall $[a, b]$ endlich, aber der Integrand ist nur auf dem einseitig offenen Intervall $(a, b]$ (oder $[a, b)$) stetig. Wir definieren, ganz analog zum Vorgehen im obigen Fall,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\xi \rightarrow a^+} \int_\xi^b f(x) dx .$$

Beispiel

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \int_{\xi}^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} (\log 1 - \log \xi) \text{ existiert nicht!}$$

Beispiel Es sei $0 < k$, $k \neq 1$ und $a < b$.

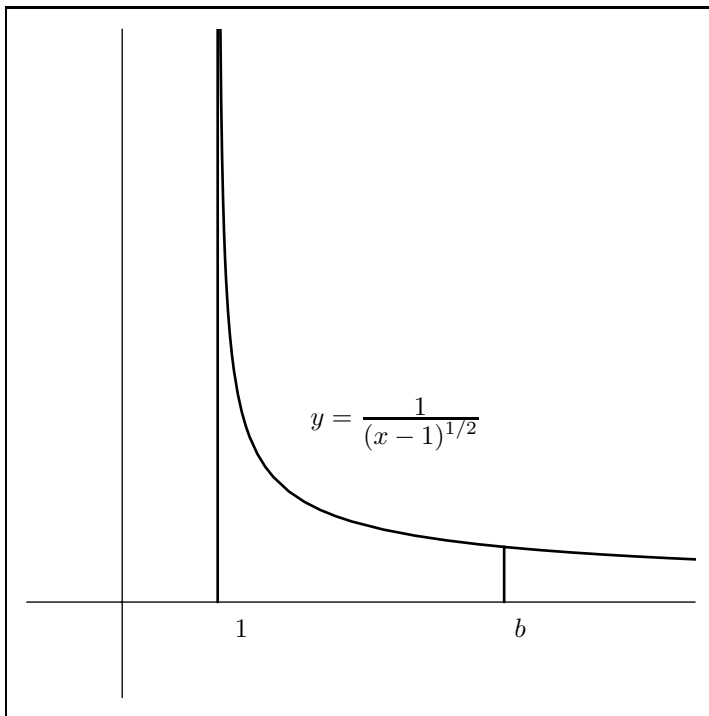


FIG. 6:
Die Funktion
 $x \rightarrow \frac{1}{(x-1)^{1/2}}$

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^k} dx = \lim_{\xi \rightarrow a^+} \int_{\xi}^b \frac{1}{(x-a)^k} dx = \frac{1}{1-k} \lim_{\xi \rightarrow a^+} \left(\frac{1}{(b-a)^{k-1}} - \frac{1}{(\xi-a)^{k-1}} \right) .$$

Dieser Limes, und demzufolge das Integral, existiert für $0 < k < 1$; er existiert *nicht* für $1 < k$.

Beispiel

$$\int_0^1 \log x dx = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \int_{\xi}^1 \log x dx = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} [x(\log x - 1)]_{\xi}^1 = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} (-1 - \xi \log \xi + \xi) = -1 .$$