

12 Trägheitsmoment

Eine weitere physikalisch-mechanische Anwendung des Integrals betrifft das sogenannte **Trägheitsmoment**. Es tritt etwa bei der Berechnung der kinetischen Energie eines rotierenden starren Systems auf. Derselben mathematischen Bildung begegnet man aber in vielen anderen Zusammenhängen ebenfalls, in der Mechanik bei der Behandlung von Torsions- und Biegeungsproblemen, in der Wahrscheinlichkeitsrechnung beim Begriff der Varianz, etc.

Wie im Abschnitt über die Schwerpunktsberechnung betrachten wir zuerst ein diskretes System. Es bestehe aus Massenpunkten der Masse m_1, m_2, \dots, m_n , die sich in den Punkten $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n)$ befinden. Wir lassen dieses System mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die z -Achse rotieren, und fragen nach der kinetischen Energie T . Da die Masse m_i bei dieser Rotation die Geschwindigkeit

$$(x_i^2 + y_i^2)^{1/2} \omega$$

besitzt, ist T gegeben durch

$$T = \frac{1}{2} \left(m_1(x_1^2 + y_1^2) + m_2(x_2^2 + y_2^2) + \dots + m_n(x_n^2 + y_n^2) \right) \omega^2 .$$

Definitionsgemäss heisst die hier auf natürliche Art auftretende Grösse

$$\Theta_z = m_1(x_1^2 + y_1^2) + m_2(x_2^2 + y_2^2) + \dots + m_n(x_n^2 + y_n^2)$$

das Trägheitsmoment des Systems um die z -Achse. Auf analoge Weise sind das Trägheitsmoment Θ_x um die x -Achse

$$\Theta_x = m_1(y_1^2 + z_1^2) + m_2(y_2^2 + z_2^2) + \dots + m_n(y_n^2 + z_n^2)$$

und das Trägheitsmoment Θ_y um die y -Achse

$$\Theta_y = m_1(x_1^2 + z_1^2) + m_2(x_2^2 + z_2^2) + \dots + m_n(x_n^2 + z_n^2)$$

definiert.

Wir entnehmen diesen Überlegungen die Tatsache, dass das Trägheitsmoment eines mechanischen Systems um die Achse a definiert ist als Summe der Produkte $d^2 \cdot m_d$, wo m_d die Masse des Systems bezeichnet, welches sich im Abstand d von der Achse a befindet. Diese Aussage

überträgt sich vom diskreten auf den kontinuierlichen Fall. Wir betrachten dazu wie üblich einige konkrete Beispiele.

Beispiel Es sei ein zwischen den x -Werten a und b , $a \leq b$ liegender Bereich B in der (x, y) -Ebene gegeben, der homogen mit Masse der Dichte ρ belegt ist. Wir fragen nach dem Trägheitsmoment Θ_y dieses Systems bezüglich der y -Achse. (Vergleiche Figur 1, p. 55.)

Der Abstand von der y -Achse ist gegeben durch $d = x$, und die in diesem Abstand konzentrierte Masse ist $\rho G(x) dx$, wo $G(x)$ die Ausdehnung in y -Richtung des Bereichs an der Stelle x ist. Das Trägheitsmoment Θ_y ist folglich gegeben durch das Integral

$$\Theta_y = \rho \int_a^b x^2 G(x) dx ,$$

und die kinetische Energie bei der Rotation mit Winkelgeschwindigkeit ω um die y -Achse ist

$$T_y = \frac{1}{2} \Theta_y \omega^2 .$$

Auf ganz analoge Weise erhält man das Trägheitsmoment Θ_x des Bereichs B bezüglich der x -Achse. Es liege B zwischen den y -Werten c und d , $c \leq d$, und es bezeichne $H(y)$ die Ausdehnung in x -Richtung des Bereichs B an der Stelle y . Dann gilt

$$\Theta_x = \rho \int_c^d y^2 H(y) dy .$$

(Für $\rho = 1$ spricht man auch von den **Flächenträgheitsmomenten** des Bereichs B bezüglich der x - und der y -Achse und bezeichnet sie mit J_x und J_y .)

Beispiel Gesucht ist das (Flächen-)Trägheitsmoment eines Kreises mit Radius r um einen Durchmesser (siehe Figur 1).

Offensichtlich ist

$$G(x) = 2 \sqrt{r^2 - x^2} ,$$

so dass sich für das Flächenträgheitsmoment J_y um die y -Achse

$$J_y = 2 \int_0^r 2x^2 \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

ergibt. Die Substitution $x = r \sin t$, $dx = r \cos t dt$ liefert dann

$$\begin{aligned} J_y &= 4 \int_0^{\pi/2} r^2 \sin^2 t r \cos t r \cos t dt \\ &= 4r^4 \int_0^{\pi/2} (\sin^2 t - \sin^4 t) dt \end{aligned}$$

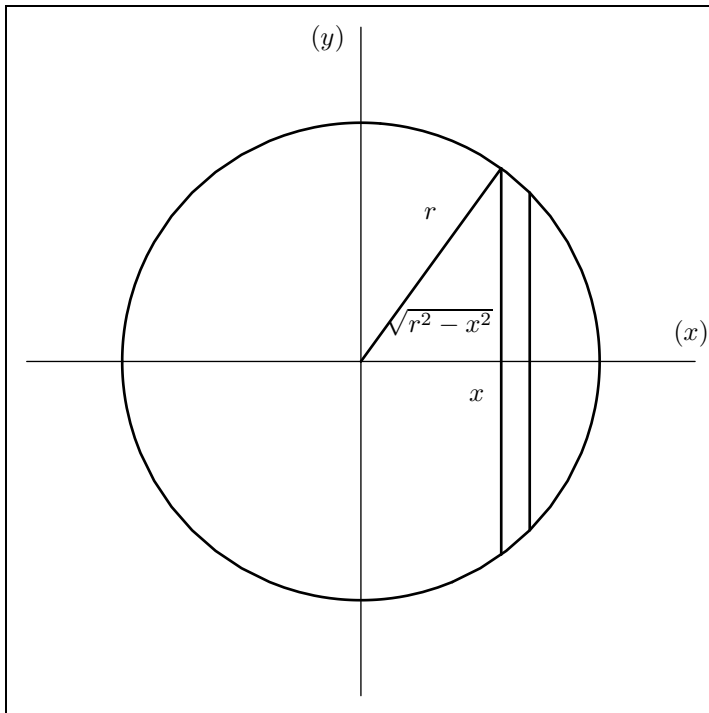


FIG. 1:
Trägheitsmoment eines
Kreises um einen Durchmesser

$$\begin{aligned}
 &= 4r^4 \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} \frac{3}{4} \right) \\
 &= \frac{\pi}{4} r^4 .
 \end{aligned}$$

Beispiel Gesucht ist das Trägheitsmoment eines homogenen Vollzylinders (Dichte ρ) um seine Achse.

Wir betrachten den auf der (x, y) -Ebene stehenden Kreiszyylinder mit Radius r und Höhe h . Seine Achse falle mit der z -Achse zusammen. Im Abstand x von der z -Achse befindet sich die Masse

$$dm = \rho (2\pi x) h dx .$$

Damit erhalten wir für das Trägheitsmoment Θ_z

$$\begin{aligned}
 \Theta_z &= \rho \int_0^r x^2 (2\pi x) h dx \\
 &= 2\pi \rho h \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^r \\
 &= \frac{1}{2} \pi \rho h r^4 .
 \end{aligned}$$

Aus diesem Resultat ergibt sich ohne Schwierigkeit auch das Trägheitsmoment Θ einer Kreisscheibe um eine senkrecht dazu stehende Achse durch den Mittelpunkt. Ist die (Flächen-)Dichte gleich 1, so erhält man dafür

$$\Theta = \frac{1}{2}\pi r^4 .$$

Man nennt dies auch das *polare* Flächenträgheitsmoment J_0 der Kreisscheibe. Man vergleiche an dieser Stelle die Werte der Flächenträgheitsmomente J_x, J_y, J_0 der Kreisscheibe.

Beispiel Gesucht ist das Trägheitsmoment Θ_x des von dem Graphen von $x \rightarrow f(x)$, $x \in [a, b]$ bei der Rotation um die x -Achse erzeugten (homogenen) Rotationskörpers bezüglich seiner Achse (siehe Figur 2).

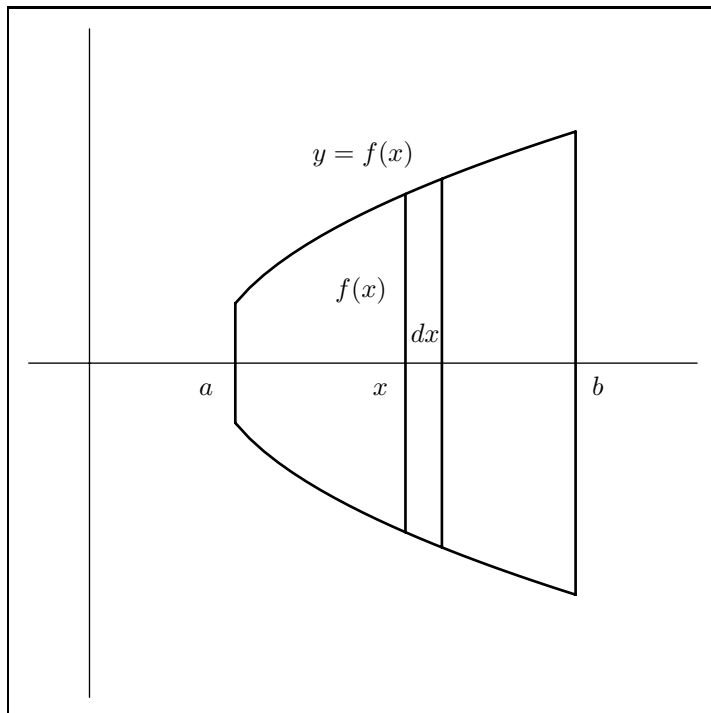


FIG. 2 :
Trägheitsmoment eines
Rotationskörpers um
seine Achse

Wir gehen hier ähnlich vor wie bei der Volumen- und Oberflächenberechnung von derartigen Rotationskörpern und zerschneiden diesen in “dünne” Scheiben der Dicke dx . Jede solche Scheibe kann dann (approximativ) als Vollzylinder mit Radius $f(x)$ und Höhe dx angesehen werden, so dass ihr Trägheitsmoment $d\Theta_x$ nach dem vorhergehenden Beispiel durch

$$d\Theta_x = \frac{1}{2}\pi\rho \, dx \, (f(x))^4$$

gegeben ist. Das Trägheitsmoment des ganzen Körpers ergibt sich daraus durch Integration

$$\Theta_x = \frac{1}{2} \pi \rho \int_a^b (f(x))^4 dx .$$

Beispiel Gesucht ist das Trägheitsmoment einer homogenen Vollkugel mit Radius R um einen Durchmesser (siehe Figur 3).

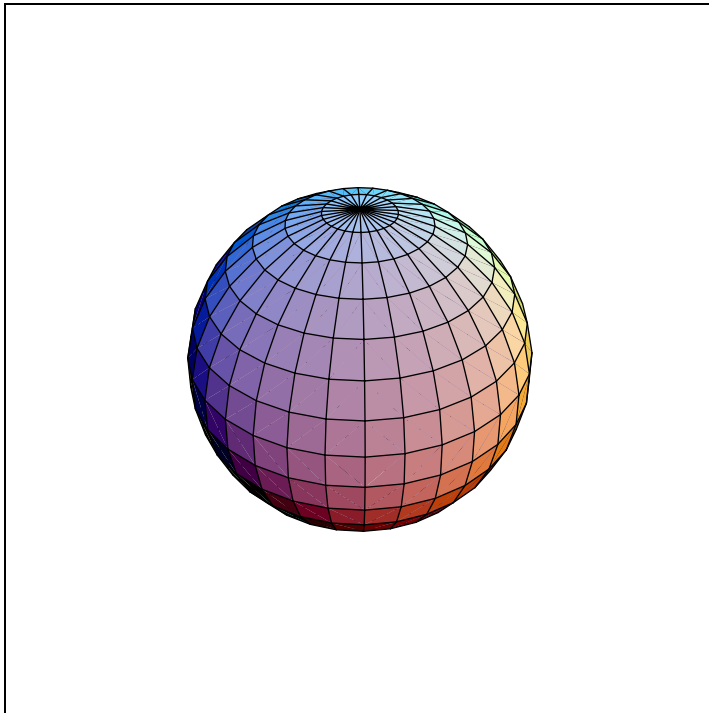


FIG. 3:
Vollkugel

Wir berechnen das Trägheitsmoment Θ_x der homogenen Vollkugel mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius R , wobei wir diese als Rotationskörper bezüglich der x -Achse ansehen, der zur Funktion

$$x \rightarrow f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad x \in [-R, +R]$$

gehört. Wir erhalten nach dem obigen Beispiel

$$\begin{aligned} \Theta_x &= \frac{1}{2} \pi \rho \int_{-R}^{+R} (R^2 - x^2)^2 dx \\ &= \pi \rho \int_0^R (R^4 - 2R^2 x^2 + x^4) dx \\ &= \pi \rho \left[R^4 x - \frac{2}{3} R^2 x^3 + \frac{1}{5} x^5 \right]_0^R \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \pi \rho R^5 \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) \\
 &= \frac{8}{15} \pi \rho R^5 .
 \end{aligned}$$

Beispiel Gesucht ist das Trägheitsmoment eines homogenen Torus (Dichte ρ) um seine Achse (siehe Figur 4).

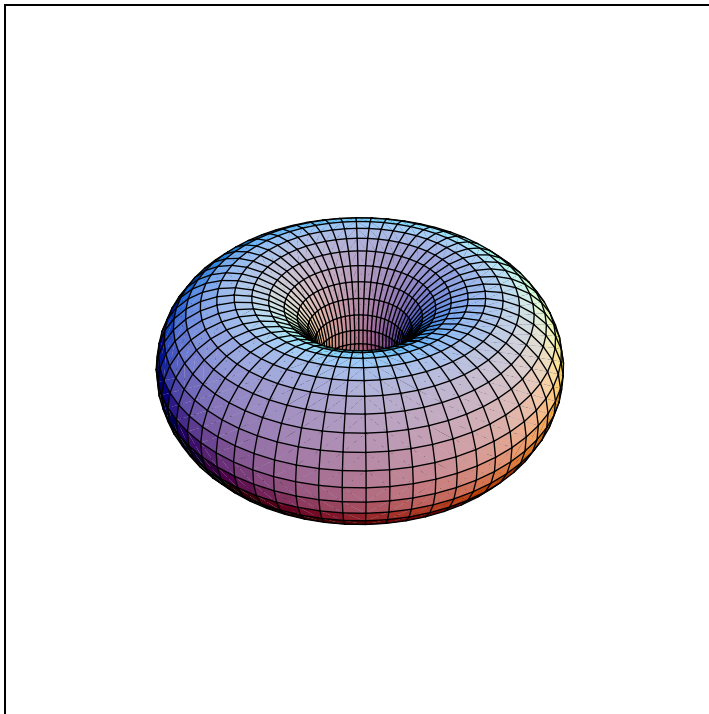


FIG. 4:
Torus

Wir betrachten den Torus als Rotationskörper, der von einem Kreis mit Radius r und Mittelpunkt $(R, 0, 0)$ bei der Rotation um die z -Achse erzeugt wird und gehen ähnlich vor wie bei der Berechnung des Trägheitsmomentes des Kreiszylinders. Die Masse, die den Abstand x von der Rotationsachse besitzt, ist offenbar gegeben durch (siehe Figur 5)

$$dm = 2\pi \rho x \, 2\sqrt{r^2 - (x - R)^2} \, dx ,$$

so dass der davon resultierende Anteil $d\Theta_z$ an das Trägheitsmoment sich zu

$$d\Theta_z = 2\pi \rho x^3 \, 2\sqrt{r^2 - (x - R)^2} \, dx$$

ergibt. Integration liefert dann Θ_z

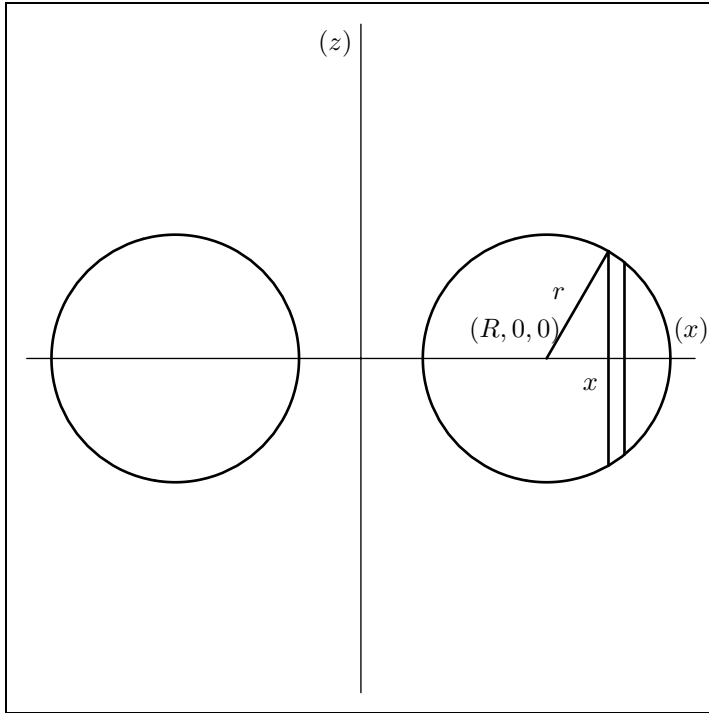


FIG. 5:
Trägheitsmoment eines
Torus um seine Achse

$$\Theta_z = 4\pi\rho \int_{R-r}^{R+r} x^3 \sqrt{r^2 - (x-R)^2} dx .$$

Wir lösen dieses Integral mit Hilfe der Substitution $x - R = r \sin t$, $dx = r \cos t dt$ und erhalten

$$\begin{aligned} \Theta_z &= 4\pi\rho \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (R + r \sin t)^3 r \cos t r \cos t dt \\ &= 4\pi\rho r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (R^3 + 3R^2 r \sin t + 3Rr^2 \sin^2 t + r^3 \sin^3 t)(1 - \sin^2 t) dt \\ &= 4\pi\rho r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (R^3 + 3Rr^2 \sin^2 t - R^3 \sin^2 t - 3Rr^2 \sin^4 t) dt . \end{aligned}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt benutzt, dass das Integral über eine ungerade Funktion Null ist, wenn das Integrationsintervall symmetrisch zum Nullpunkt liegt. Die Integration liefert nun mit den in Abschnitt 6 hergeleiteten Formeln

$$\Theta_z = 4\pi\rho r^2 \left(R^3 \pi + 3Rr^2 \frac{\pi}{2} - R^3 \frac{\pi}{2} - 3Rr^2 \frac{\pi}{2} \frac{3}{4} \right) = 2\pi^2 \rho r^2 \left(R^3 - \frac{3}{4} Rr^2 \right) .$$

Das Trägheitsmoment oder die kinetische Energie eines rotierenden starren Körpers, wie auch schon die Integrale, die bei der Schwerpunktberechnung aufgetreten sind, sind eigentlich Beispiele

für einen allgemeineren Begriff des Integrals. Wir erklären dies an dieser Stelle kurz am Beispiel der kinetischen Energie, werden aber gegen Ende des Semesters auf diesen Punkt in voller Allgemeinheit eingehend zurückkommen. Der Einfachheit halber betrachten wir einen (dreidimensionalen) starren Körper B mit homogener Massenverteilung (Dichte ρ konstant). Rotiert dieser Körper um die Achse a mit der Winkelgeschwindigkeit ω , so trägt das "Volumenelement dV " zur kinetischen Energie die Grösse

$$dT = \frac{1}{2} \rho dV (l\omega)^2 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 l^2 dV$$

bei, wobei l den Abstand des Volumenelementes dV von der Rotationsachse bezeichnet. "Summation" über alle Volumenelemente von B und Grenzübergang über eine Folge von immer feiner werdenden Unterteilungen des Bereiches B liefert dann das sogenannte **Volumenintegral**

$$T = \iiint_B \frac{1}{2} \rho \omega^2 l^2 dV = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \iiint_B l^2 dV .$$

Konsequenterweise ist das Trägheitsmoment als Volumenintegral

$$\Theta = \rho \iiint_B l^2 dV$$

gegeben. Zur Definition des Volumenintegrals geht man also ganz ähnlich vor wie bei der Definition des gewöhnlichen Riemann'schen Integrals (siehe Abschnitt 1). Es sei ein räumlicher Bereich B und eine darauf definierte reellwertige Funktion

$$f : (x, y, z) \rightarrow f(x, y, z) , \quad D(f) = B$$

gegeben. Um zum Integral

$$\iiint_B f(x, y, z) dV$$

zu gelangen führt man die folgenden Schritte durch:

- (a) Teile B in n kleine Teile ΔB_i mit Volumen ΔV_i ein , $i = 1, 2, \dots, n$.
- (b) Wähle in jedem ΔB_i einen Punkt (x_i, y_i, z_i) . Die *Feinheit* der Einteilung ist definiert als Durchmesser der kleinsten Kugel, in der jedes einzelne der ΔB_i Platz hat.
- (c) Bilde die Riemann'sche Summe

$$f(x_1, y_1, z_1) \Delta V_1 + f(x_2, y_2, z_2) \Delta V_2 + \dots + f(x_n, y_n, z_n) \Delta V_n .$$

(d) Definiere das Integral

$$\iiint_B f(x, y, z) \, dV = \lim (f(x_1, y_1, z_1)\Delta V_1 + f(x_2, y_2, z_2)\Delta V_2 + \cdots + f(x_n, y_n, z_n)\Delta V_n)$$

als Limes der Riemann'schen Summe, wobei für den Grenzübergang eine Folge von Einteilungen von B zugrunde zu legen ist, deren Feinheit gegen Null strebt.

Wie beim ursprünglichen Riemann'schen Integral zeigt man, dass der Grenzwert im Schritt (d) nicht von der Wahl der Punkte (x_i, y_i, z_i) und auch nicht von der Wahl der Folge der Einteilungen abhängt, falls der Integrand f eine stetige Funktion ist. - Im Beispiel des Trägheitsmomentes

$$\iiint_B l^2 \, dV$$

ist die Funktion f durch l^2 gegeben, d.h. der Funktionswert $f(x, y, z)$ ist das Quadrat des Abstandes des Punktes (x, y, z) von der Achse a .