

5 Die Methode der Substitution

Die effiziente Handhabung der partiellen Integration lernt man durch intensives Üben. Gleiches gilt in noch vermehrter Masse für die **Methode der Substitution**. Wir beschränken uns in dieser kurzen Darstellung im wesentlichen auf Beispiele (das Üben überlassen wir wie üblich dem Leser!) und verzichten auch auf eine vollständige Begründung der Methode. (Dies ist übrigens trotz der Einfachheit der zugrunde liegenden Idee recht umständlich.) Immerhin wollen wir festhalten und auch begreiflich machen, dass die Methode der Substitution für die Integration das Pendant der Kettenregel der Differentiation ist, wie die Methode der partiellen Integration dasjenige der Produktregel.

Beispiel Im Integral

$$I = \int \sin^n x \cos x \, dx$$

substituieren wir als neue Funktion $u(x) = \sin x$. Dann ist $u'(x) = \cos x$, so dass sich das Integral I in der Form

$$I = \int (u(x))^n u'(x) \, dx$$

schreiben lässt. Die Funktion

$$x \rightarrow U(x) = \frac{1}{n+1} (u(x))^{n+1}$$

ist dann eine Stammfunktion von $((u(x))^n u'(x))$, wie man durch Ableiten mit Hilfe der *Kettenregel* sofort bestätigt. Wir erhalten demzufolge

$$I = \int \sin^n x \cos x \, dx = \frac{1}{n+1} \sin^{n+1} x + C .$$

Man liest an diesem Beispiel ab, dass sich eine *Substitution einer Funktion $u(x)$ besonders dann aufdrängt, wenn der Integrand $u'(x)$ als Faktor enthält*.

Mit der – man kann nicht anders sagen – raffinierten Notation, die von Leibniz eingeführt worden ist, lässt sich im übrigen der Gang der Rechnung in abgekürzter Weise einfach darstellen. Man fasst dabei – rein formal – $du = u'(x) \, dx$ als das “Differential” der Funktion u auf.

Es sei $I = \int \sin^n x \cos x \, dx$. Mit $u(x) = \sin x$, $du = u'(x) \, dx = \cos x \, dx$, wird daraus

$$I = \int u^n \, du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C .$$

Die "Rücksubstitution" liefert dann

$$I = \frac{1}{n+1} \sin^{n+1} x + C .$$

Beispiel Für das Integral $I = \int x \sin(x^2) \, dx$ wählt man die Substitution $u = x^2$. Daraus folgt $du = 2x \, dx$, d.h. $x \, dx = du/2$ und man erhält

$$I = \frac{1}{2} \int \sin u \, du = -\frac{1}{2} \cos u + C .$$

Die "Rücksubstitution" liefert dann

$$I = -\frac{1}{2} \cos(x^2) + C .$$

Neben dieser *direkten* Art, eine Substitution zu verwenden, gibt es auch eine, die in der "*umgekehrten Richtung*" verläuft. Auch dazu einige Beispiele:

Beispiel Im Integral

$$I = \int \sqrt{1-u^2} \, du$$

substituieren wir $u = \sin x$, $du = \cos x \, dx$. Dann erhalten wir wegen $1-u^2 = 1-\sin^2 x = \cos^2 x$

$$\int \cos x \cos x \, dx = \int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C .$$

Die "Rücksubstitution" liefert

$$I = \frac{1}{2} \left(\arcsin u + u \sqrt{1-u^2} \right) + C .$$

Den Leser mag einwenden – und dies mit vollem Recht –, dass wir in diesem Beispiel an zwei Stellen nicht ganz “sauber” gerechnet haben: wir haben ohne Rücksicht auf das Vorzeichen von $\cos x$

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

gesetzt, und wir haben ohne Rücksicht auf den Wertebereich von \arcsin

$$x = \arcsin(\sin x)$$

gesetzt. Beide Gleichungen gelten ja nur unter zusätzlichen Bedingungen, etwa $0 \leq x \leq \pi/2$. Unsere forsche Art zu rechnen entspricht an dieser Stelle guter Praxis: es ist bei der Methode der Substitution in der Regel einfacher, Gleichungen wie die obige ohne Rücksicht auf den eingeschränkten Gültigkeitsbereich zu benützen, und dann *am Schluss zu verifizieren, dass das erhaltene Resultat allgemein, d.h. für alle x gültig ist*. Letzteres (also die Kontrolle) sollte man allerdings immer durchführen:

$$\frac{d}{du} \frac{1}{2} (\arcsin u + u\sqrt{1-u^2}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} + \sqrt{1-u^2} - \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}} \right) = \sqrt{1-u^2} .$$

Beispiel Im Integral $I = \int \sqrt{x^2 + 1} dx$ setzt man $x = \sinh t$, $dx = \cosh t dt$ und erhält wegen $\sinh^2 t + 1 = \cosh^2 t$ das Integral

$$I = \int \cosh t \cdot \cosh t dt ,$$

welches man mit partieller Integration weiter behandeln kann. Setzt man

$$\begin{aligned} u'(t) &= \cosh t , & u(t) &= \sinh t , \\ v(t) &= \cosh t , & v'(t) &= \sinh t , \end{aligned}$$

so folgt

$$I = \sinh t \cdot \cosh t - \int \sinh^2 t dt .$$

Wegen $\sinh^2 t = \cosh^2 t - 1$ erhält man dann eine Gleichung für I , die sich leicht auflösen lässt:

$$I = \frac{1}{2}(t + \sinh t \cosh t) + C .$$

Die Rücksubstitution liefert wegen $\cosh t = \sqrt{\sinh^2 t + 1}$

$$I = \frac{1}{2}(\operatorname{Arsinh} x + x\sqrt{x^2 + 1}) + C ;$$

ein Resultat, welches man leicht durch Ableiten bestätigt.

Auf analoge Weise wie in den obigen Beispielen erhält man das folgende Integral

$$\int \sqrt{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2}(-\operatorname{Arcosh} x + x\sqrt{x^2 - 1}) + C .$$

Beispiel Man berechne den Flächeninhalt F der Ellipse mit Halbachsen a , b .

Die obere Hälfte der Ellipsenperipherie ist als Graph der Funktion

$$f : x \rightarrow b\sqrt{1 - x^2/a^2}, \quad D(f) = [-a, +a]$$

gegeben. Um die ganze Ellipsenfläche F zu bestimmen, genügt es offenbar, die Fläche $F/4$ des Ellipsenviertels im ersten Quadranten auszurechnen

$$\frac{F}{4} = \int_0^a b \sqrt{1 - x^2/a^2} dx .$$

Für das unbestimmte Integral

$$I = \int b \sqrt{1 - x^2/a^2} dx$$

bietet sich die Substitution $x = a \sin t$, $dx = a \cos t dt$ an. Man erhält damit nach einem der obigen Resultate

$$\int ab \cos^2 t dt = \frac{ab}{2}(t + \sin t \cos t) + C$$

und nach der Rücksubstitution

$$I = \frac{ab}{2} \left(\arcsin \left(\frac{x}{a} \right) + \frac{x}{a} \sqrt{1 - x^2/a^2} \right) + C .$$

Einsetzen der Grenzen liefert dann

$$\begin{aligned} F &= 4 \cdot \left[\frac{ab}{2} \left(\arcsin \left(\frac{x}{a} \right) + \frac{x}{a} \sqrt{1 - x^2/a^2} \right) \right]_0^a \\ &= 4 \cdot \left(\frac{ab}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \pi ab . \end{aligned}$$

Neben diesem etwas umständlichen Weg gibt es auch die Möglichkeit, die Substitution direkt im *bestimmten* Integral durchzuführen, d.h. *die Substitution auch auf die Integrationsgrenzen wirken zu lassen*.

Für die untere Grenze $x = 0$ erhält man $t = 0$, für die obere $x = a$ erhält man $t = \pi/2$. Man hat somit

$$\begin{aligned} \frac{F}{4} &= \int_0^a b \sqrt{1 - x^2/a^2} \, dx = \int_0^{\pi/2} ab \cos^2 t \, dt = \frac{\pi}{4} ab , \\ F &= \pi ab . \end{aligned}$$

Bei der Berechnung der Wirkung der Substitution auf die Integrationsgrenzen müssen den Integrationsgrenzen in x in *eindeutiger* Weise Integrationsgrenzen in t zugeordnet werden können. Dies ist nur dann gewährleistet, wenn man bei der Substitution für die ursprüngliche Integrationsvariable eine *injektive* Funktionen verwendet. Möglicherweise muss man dabei den (sonst üblichen) Definitionsbereich der Substitutionsfunktion einschränken. In unserem Fall müssen wir dies in der Tat tun: der Definitionsbereich der Funktion

$$t \rightarrow x = a \sin t$$

wird auf das Intervall $[0, \pi/2]$ eingeschränkt, dort ist die Funktion injektiv und den Integrationsgrenzen in x können *eindeutig* Integrationsgrenzen in t zugeordnet werden.

Die Wirkung der Substitution auf die Integrationsgrenzen wird vom Anfänger gerne vergessen; man achte also besonders auf diesen Punkt.