

11 Schwerpunkt, Flächenmittelpunkt

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Berechnung des Schwerpunktes eines mechanischen Systems. Wir fassen dabei den Schwerpunkt als Kraftmittelpunkt auf.

Zuerst betrachten wir in Richtung der y -Achse wirkende Kräfte K_1, K_2, \dots, K_n , die in den Punkten x_1, x_2, \dots, x_n der x -Achse angreifen. Der Kraftmittelpunkt x_s dieses Systems genügt dann der Gleichung

$$(x_1 - x_s)K_1 + (x_2 - x_s)K_2 + \dots + (x_n - x_s)K_n = 0 ,$$

so dass sich für x_s die Formel

$$x_s = \frac{1}{K_1 + K_2 + \dots + K_n} (x_1 K_1 + x_2 K_2 + \dots + x_n K_n)$$

ergibt.

Wenn die Kräfte nicht diskret, sondern kontinuierlich verteilt sind, wenn also die Kraftdichte an der Stelle x durch die Funktion $x \rightarrow G(x)$, $x \in [a, b]$ gegeben ist, so genügt der Kraftmittelpunkt x_s in analoger Weise der Gleichung

$$x_s \int_a^b G(x) dx = \int_a^b x G(x) dx .$$

Man beachte, dass

$$\int_a^b G(x) dx$$

nichts anderes als die Totalkraft ist.

Wir wenden diese Überlegungen zuerst auf die Berechnung des **Flächenmittelpunktes** eines Bereiches B der (x, y) -Ebene an. Darunter verstehen wir den Kraftmittelpunkt der Gravitationskräfte, die auf den homogen mit Masse der Dichte 1 belegten Bereich B wirken (**Schwerpunkt**). Wirkt die Gravitationskraft in Richtung der y -Achse, so ist deren Kraftdichte $G(x)$ an der Stelle x natürlich einfach die Ausdehnung in y -Richtung des Bereiches B an der Stelle x . Wirkt die Gravitationskraft in Richtung der x -Achse, so ist die Kraftdichte $H(y)$ an der Stelle y die Ausdehnung in x -Richtung des Bereiches B an der Stelle y (siehe Figur 1). Der Punkt (x_s, y_s) mit

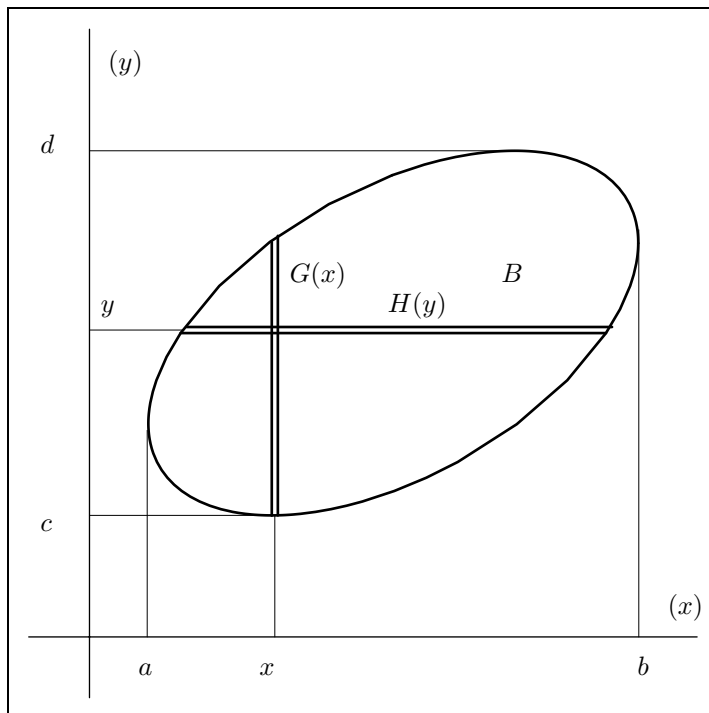


FIG. 1:
Zur Berechnung des
Schwerpunktes

$$\begin{aligned} x_s \int_a^b G(x) \, dx &= \int_a^b x G(x) \, dx \\ y_s \int_c^d H(y) \, dy &= \int_c^d y H(y) \, dy \end{aligned}$$

ist dann der Flächenmittelpunkt des Bereiches B .

Beispiel Gesucht ist der Flächenmittelpunkt des Viertelkreises im ersten Quadranten mit Radius R (siehe Figur 2).

Aus Symmetriegründen gilt natürlich $x_s = y_s$. Für x_s erhalten wird die Gleichung

$$\begin{aligned} x_s \cdot r^2 \frac{\pi}{4} &= \int_0^r x \sqrt{r^2 - x^2} \, dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^r (-2x) \sqrt{r^2 - x^2} \, dx \\ &= -\frac{1}{2} \frac{2}{3} \left[(r^2 - x^2)^{3/2} \right]_0^r \\ &= \frac{1}{3} r^3. \end{aligned}$$

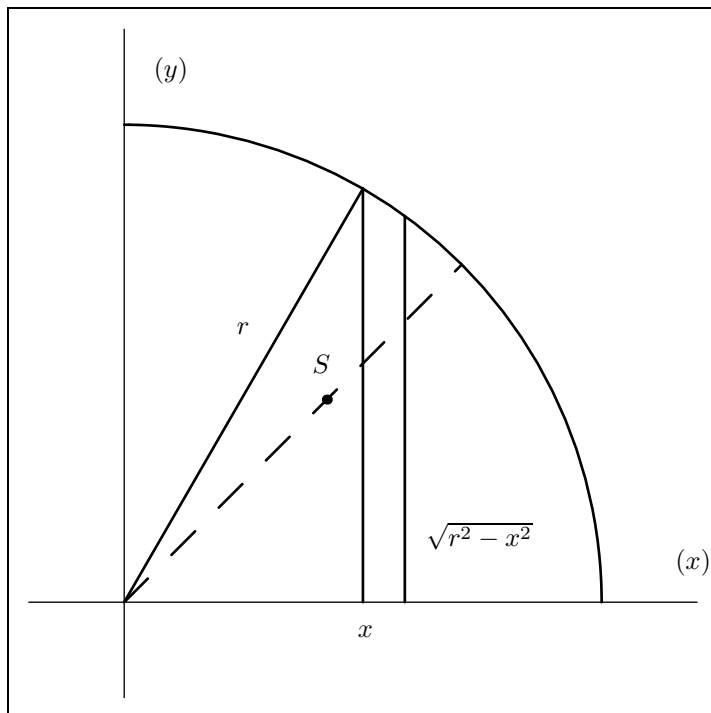


FIG. 2:
Schwerpunkt des Viertelkreises

Daraus ergibt sich

$$x_s = \frac{4}{3\pi} r .$$

Der Schwerpunkt eines räumlichen Bereiches berechnet sich auf ganz analoge Weise. Auch dazu ein Beispiel.

Beispiel Gesucht ist der Schwerpunkt einer homogenen Halbkugel (siehe Figur 3).

Offenbar dürfen wir voraussetzen, dass die Dichte 1 ist. Wir betrachten die Halbkugel als Rotationskörper, der durch Rotation eines Viertelkreises um die x -Achse entsteht. Der Schwerpunkt (x_s, y_s, z_s) liegt aus Symmetriegründen natürlich auf der x -Achse; damit gilt $y_s = z_s = 0$. Für x_s haben wir die Gleichung

$$x_s \int_0^r G(x) dx = \int_0^r x G(x) dx ,$$

wobei $G(x)$ die Kraftdichte der Gravitation in Richtung der z -Achse bezeichnet. Offensichtlich gilt

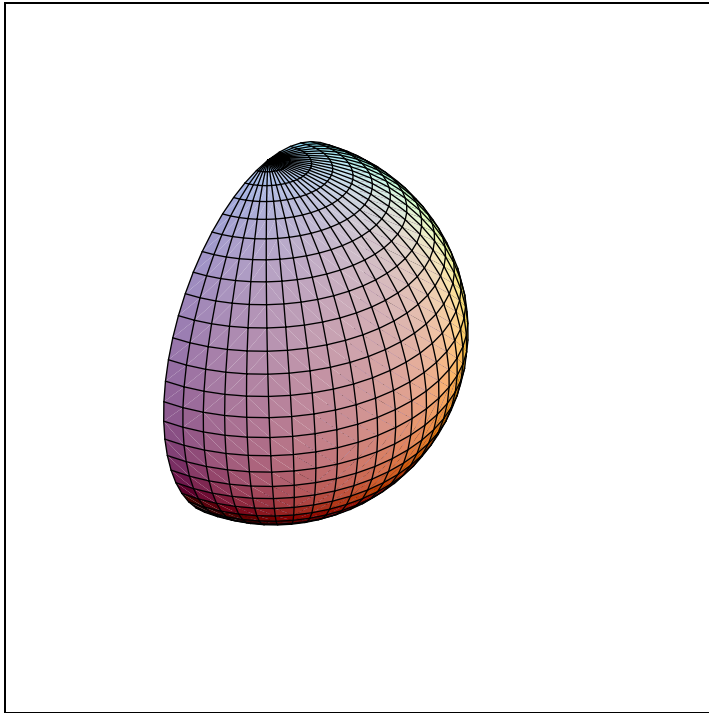


FIG. 3 :
Schwerpunkt einer Halbkugel

$$G(x) = \pi(r^2 - x^2) .$$

Ferner lässt sich die totale Kraft, das Gewicht der Halbkugel direkt angeben:

$$\int_0^r G(x) dx = \frac{2}{3} \pi r^3 .$$

Damit erhält man

$$x_s \cdot \frac{2}{3} \pi r^3 = \pi \int_0^r x(r^2 - x^2) dx = \pi \left[\frac{x^2 r^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^r = \pi \left(\frac{r^4}{2} - \frac{r^4}{4} \right) ,$$

und es ergibt sich

$$x_s = \frac{3}{8} r .$$

Formal das gleiche Integral wie bei der Schwerpunktberechnung tritt auch in ganz anderem Zusammenhang auf, z.B. in der Wahrscheinlichkeitsrechnung beim Mittelwert einer Wahrscheinlichkeitsverteilung.