

## 4 Die Methode der partiellen Integration

Die **Methode der partiellen Integration** ist die Umkehrung der Ableitungsregel für ein Produkt von Funktionen. Sind  $u : x \rightarrow u(x)$  und  $v : x \rightarrow v(x)$  zwei Funktionen, so gilt

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' .$$

Es folgt daraus

$$uv + C = \int (u \cdot v)' dx = \int u'v dx + \int uv' dx$$

und damit

$$\int u'v dx = uv - \int uv' dx .$$

Wir sehen die Nützlichkeit dieser Formel in den folgenden Beispielen.

**Beispiel** Im Integral

$$\int xe^x dx$$

setzen wir

$$\begin{aligned} u'(x) &= e^x & , & & u(x) &= e^x , \\ v(x) &= x & , & & v'(x) &= 1 . \end{aligned}$$

Dann liefert die Formel für die partielle Integration

$$\begin{aligned} \int xe^x dx &= xe^x - \int 1 \cdot e^x dx \\ &= xe^x - e^x + C \\ &= (x - 1)e^x + C . \end{aligned}$$

Wählen wir die Funktionen  $u, v$  anders, setzen wir

$$\begin{aligned} u'(x) &= x & , & & u(x) &= x^2/2 , \\ v(x) &= e^x & , & & v'(x) &= e^x , \end{aligned}$$

so erhalten wir

$$\int x e^x dx = \frac{x^2}{2} e^x - \int \frac{x^2}{2} e^x dx .$$

Hier ist das Integral auf der rechten Seite der Gleichung offenbar komplizierter als das Ausgangsintegral; die partielle Integration läuft in der verkehrten Richtung und hilft anscheinend nicht weiter. Immerhin können wir an der letzten Gleichung ablesen

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C \\ &= (x^2 - 2x + 2)e^x + C , \end{aligned}$$

so dass unsere Arbeit doch nicht ganz nutzlos war.

**Beispiel** Im Integral

$$\int \sin^2 x dx$$

setzen wir

$$\begin{aligned} u'(x) &= \sin x & , & & u(x) &= -\cos x , \\ v(x) &= \sin x & , & & v'(x) &= \cos x , \end{aligned}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x dx &= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x dx \\ &= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) dx \\ &= -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x dx . \end{aligned}$$

Wiederum scheint die partielle Integration nicht zum Ziele geführt zu haben, tritt doch auf der rechten Seite das Ausgangsintegral noch einmal auf. Schaut man allerdings näher hin, so sieht man, dass eine Gleichung für die unbekannte Grösse  $\int \sin^2 x \, dx$  vorliegt, die sich ohne Schwierigkeiten auflösen lässt:

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C.$$

Auf analoge Weise erhält man

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C,$$

ein Resultat, das sich aus obigem auch mit  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$  herleiten lässt.

**Beispiel** Im Integral

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx$$

mit  $a, b \in \mathbb{R}$  setzen wir

$$\begin{aligned} u'(x) &= e^{ax} & , & & u(x) &= e^{ax}/a & , \\ v(x) &= \cos bx & , & & v'(x) &= -b \sin bx & . \end{aligned}$$

Dies liefert

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx \, dx .$$

Setzt man im verbleibenden Integral

$$\begin{aligned} u'(x) &= e^{ax} & , & & u(x) &= e^{ax}/a & , \\ v(x) &= \sin bx & , & & v'(x) &= b \cos bx & , \end{aligned}$$

so erhält man im zweiten Schritt

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \left( \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx \, dx \right) .$$

Wie im letzten Beispiel hat man eine Gleichung für die unbekannte Grösse vor sich, die sich leicht auflösen lässt:

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx) + C .$$

### Beispiel

$$\int \log x \, dx = \int 1 \cdot \log x \, dx = x \log x - \int x \frac{1}{x} \, dx = x (\log x - 1) + C .$$

Dabei haben wir

$$\begin{aligned} u'(x) &= 1 & , & & u(x) &= x , \\ v(x) &= \log x & , & & v'(x) &= 1/x \end{aligned}$$

gesetzt.

### Beispiel

$$\int \arctan x \, dx = x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx = x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + C .$$

Dabei haben wir, ähnlich wie im letzten Beispiel,

$$\begin{aligned} u'(x) &= 1 & , & & u(x) &= x , \\ v(x) &= \arctan x & , & & v'(x) &= 1/(1+x^2) \end{aligned}$$

gesetzt. Ausserdem haben wir im verbleibenden Integral den Bruch mit 2 erweitert, um zu erreichen, dass im Zähler gerade die Ableitung des Nenners steht.