

10 Oberflächenberechnung

Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt mit der Berechnung des Oberflächeninhaltes eines Körpers, wobei wir uns auf den Fall eines Rotationskörpers beschränken. Der allgemeine Fall führt auf sogenannte mehrfache Integrale; darauf werden wir im Laufe des zweiten Semesters zurückkommen.

Gegeben ist also ein Rotationskörper; er entstehe durch Rotation des Kurvenstücks

$$t \rightarrow (x(t), y(t)) \quad , \quad t_A \leq t \leq t_B$$

um die x -Achse; dabei setzen wir die Funktionen $t \rightarrow x(t)$ und $t \rightarrow y(t)$ stetig differenzierbar voraus (siehe Figur 1). Wir stellen die Frage nach dem Inhalt der von der Kurve K bei der Rotation überstrichenen Fläche. Wir nennen dies kurz den **Oberflächeinhalt** (eigentlich Mantelflächeninhalt) des Rotationskörpers. Dabei gehen wir das Problem naiv an und führen die folgenden Plausibilitätsbetrachtungen durch. Wie bei der Volumenberechnung zerschneiden wir den Körper in “dünne” Scheiben. Jede dieser Scheiben ist (approximativ) ein Kreiskegelstumpf. Um dessen Mantelfläche zu bestimmen, rollen wir den Kegel in die Ebene ab. Die Mantelfläche des Kegelstumpfs entspricht dann einem Kreisringsektor der (“schmalen”) Breite (siehe Figur 2)

$$ds = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt .$$

Sein Flächeninhalt ist (wiederum approximativ) gegeben durch

$$dO = 2\pi y(t) \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt .$$

Nach diesen Plausibilitätsbetrachtungen “muss” der Oberflächeninhalt des Rotationskörpers durch

$$O = 2\pi \int_{t_A}^{t_B} y(t) \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt$$

gegeben sein.

Wie schon bei unserer Behandlung der Bogenlänge einer Kurve haben wir uns hier bei der Oberflächenberechnung mit heuristischen Argumenten begnügt. Vom mathematischen Standpunkt aus ist die Sachlage einiges komplizierter, als wir dies hier erscheinen lassen. Eigentlich muss nämlich der neue Begriff, also der Begriff des Oberflächeninhaltes eines Körpers an dieser

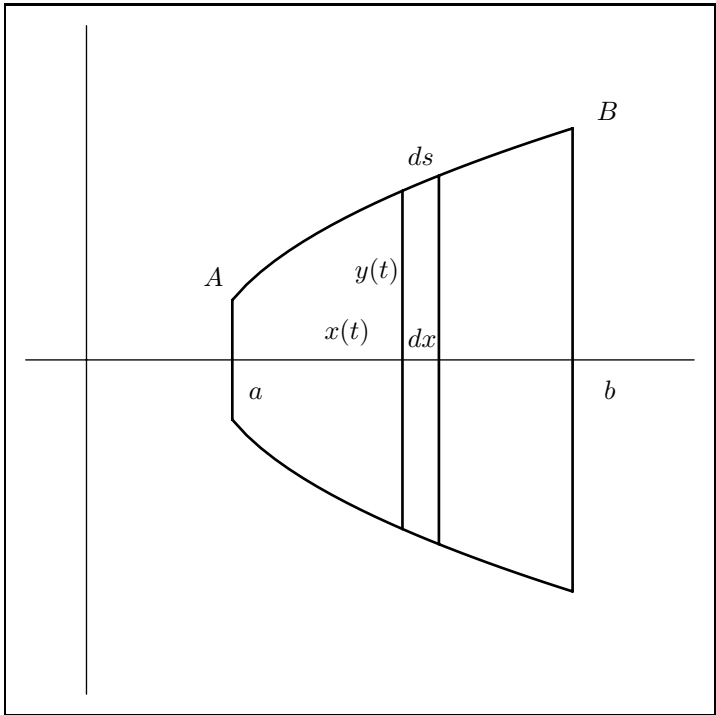


FIG. 1 :
Oberfläche

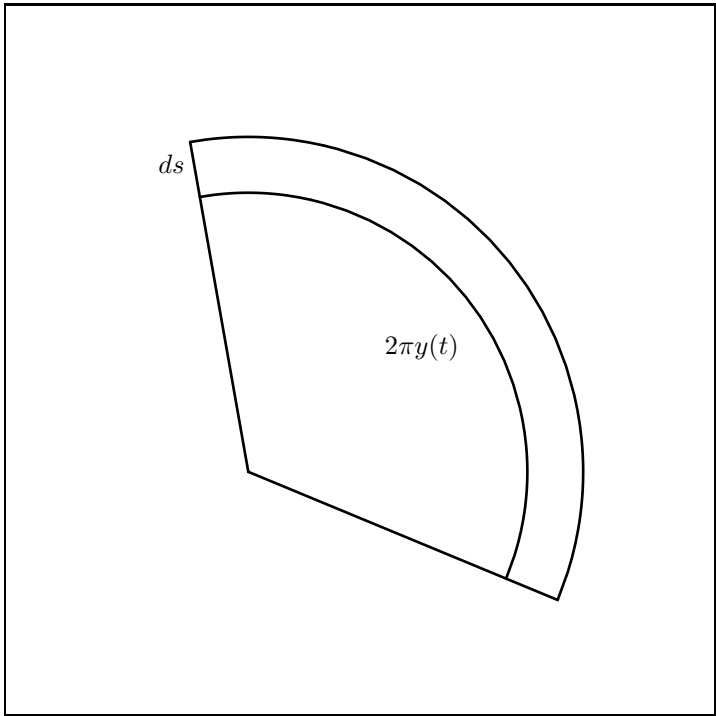


FIG. 2 :
Mantelfläche des Kegelstumpfes

Stelle definiert werden. Dies *kann* für Rotationskörper durch die obige Formel geschehen. Allerdings muss der Mathematiker dann eine ganze Anzahl wichtiger Punkte abklären; z.B. muss er zeigen, dass der durch die Formel für die Oberfläche gegebene Wert nicht von der gewählten Parameterisierung der Kurve K abhängig ist. Wir gehen in dieser Vorlesung natürlich auf diese Dinge nicht näher ein. Statt dessen betrachten wir die folgenden konkreten Beispiele.

Beispiel Gesucht ist der Oberflächeninhalt eines Torus. Wir stellen uns den Torus als Rotationskörper vor, indem wir den Kreis K mit Radius r und Mittelpunkt $M = (0, R)$ um die x -Achse rotieren lassen (siehe Figur 3). Der Kreis K ist offenbar gegeben durch

$$t \rightarrow (x(t), y(t)) = (r \cos t, R + r \sin t) , \quad 0 \leq t \leq 2\pi .$$

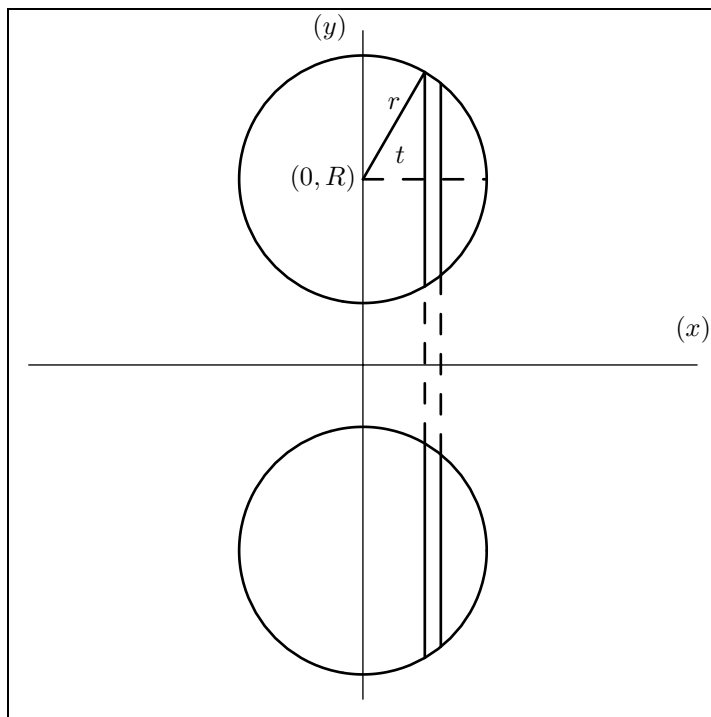


FIG. 3 :
Torus

Wegen

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -r \sin t , \\ \dot{y}(t) &= r \cos t \end{aligned}$$

erhalten wir für den Oberflächeninhalt des Torus

$$O = 2\pi \int_0^{2\pi} (R + r \sin t) \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} \, dt = 2\pi \cdot 2\pi R r = 4\pi^2 R r .$$

Beispiel Wir betrachten den Kreis K mit Radius r um den Ursprung und fragen nach dem Oberflächeninhalt der Kugelzone, die durch Rotation um die x -Achse des zwischen den x -Koordinaten a und b befindlichen Teils K' des Kreises K entsteht.

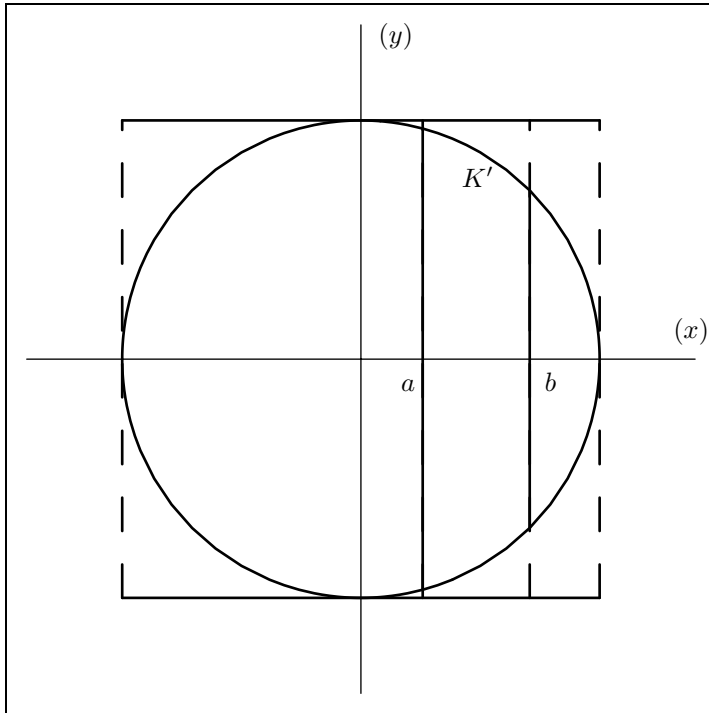


FIG. 4:
Kugelzone

Der Kreis K wird durch die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ beschrieben. Daraus erhalten wir leicht eine Parameterdarstellung des Kurvenstücks K' (mit Parameter $t = x$)

$$t \rightarrow (x(t), y(t)) = (t, \sqrt{r^2 - t^2}) , \quad a \leq t \leq b .$$

Der Oberflächeninhalt des zugehörigen Rotationskörpers, also der Kugelzone ergibt sich dann wegen

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 1 , \\ \dot{y}(t) &= -t/\sqrt{r^2 - t^2} \end{aligned}$$

zu

$$O = 2\pi \int_a^b \sqrt{r^2 - t^2} \sqrt{1 + t^2/(r^2 - t^2)} dt = 2\pi \int_a^b r dt = 2\pi r(b - a) .$$

Das Resultat verdient Beachtung: Der Oberflächeninhalt der Kugelzone zwischen den x -Koordinaten a und b ist gleich der Mantelfäche des die Kugel umschreibenden Zylinders zwischen den x -Koordinaten a und b . Projiziert man folglich die (Erd-)Kugel von einem Durchmesser aus auf den umschreibenden Zylinder und rollt man anschliessend den Zylinder in die Ebene ab, so erhält man ein *flächentreues* (Karten-)Bild der (Erd-)Kugeloberfläche. Diese Tatsache wurde 1772 von J. H. Lambert (1728 - 1777) angegeben.