

3 Das Integrieren

Es sei $f : x \rightarrow f(x)$ eine auf $[a, b]$ stetige Funktion. Die Menge ihrer Stammfunktionen bezeichnen wir mit dem Symbol

$$\int f(x) dx .$$

Sie heisst oft in etwas unglücklicher Weise das **unbestimmte Integral** von $f : x \rightarrow f(x)$. Der Übergang von f zu seinem Integral heisst **Integrieren**.

Da das Integrieren die Umkehroperation des Differenzierens ist, liefert jede Ableitungsregel eine Regel für das Integrieren. Wir halten die folgenden explizit fest:

$$\begin{aligned} \int x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ falls } n \neq -1 \\ \int \frac{1}{x} dx &= \log |x| + C \\ \int e^x dx &= e^x + C \\ \int \sin x dx &= -\cos x + C \\ \int \cos x dx &= \sin x + C \\ \int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\cot x + C \\ \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \tan x + C \\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \arcsin x + C \\ \int \frac{1}{1+x^2} dx &= \arctan x + C \\ \int \sinh x dx &= \cosh x + C \\ \int \cosh x dx &= \sinh x + C \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} &= \operatorname{Arsinh} x + C = \log(x + \sqrt{x^2+1}) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} &= \operatorname{Arcosh} x + C = \log(x + \sqrt{x^2-1}) + C \\
\int \tan x \, dx &= -\log |\cos x| + C \\
\int \cot x \, dx &= \log |\sin x| + C
\end{aligned}$$

In vielen Fällen lassen sich Integrale von komplizierten Funktionen finden, indem man versucht, das Problem auf diese oben angeführte *Standardintegrale* zurückzuführen. Dabei benützt man unter anderem die (offensichtlichen) **Rechenregeln**:

$$\begin{aligned}
\int (f(x) + g(x)) \, dx &= \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx \\
\int c f(x) \, dx &= c \int f(x) \, dx, \quad c \in \mathbb{R} \\
\int g'(f(x)) \cdot f'(x) \, dx &= g(f(x)) + C
\end{aligned}$$

Beispiel

$$\begin{aligned}
\int \sin^3 x \, dx &= \int \sin x (1 - \cos^2 x) \, dx \\
&= \int \sin x \, dx + \int (-\sin x) \cos^2 x \, dx \\
&= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C
\end{aligned}$$

Beispiel

$$\int \sqrt{ax+b} \, dx = \frac{2}{3a}(ax+b)^{3/2} + C$$

Beispiel

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \, dx = (x^2+1)^{1/2} + C.$$

In konkreten Fällen ist es manchmal recht schwierig, die Stammfunktion zu finden. Dies liegt einmal daran, dass es keine einfache *Methode* gibt, welche in allen vernünftigen Fällen eine

Stammfunktion liefert. Ferner gibt es verhältnismässig einfache Funktionen, deren Stammfunktion sich *nicht* auf elementare Weise ausdrücken lassen. Als Beispiel erwähnen wir die Funktion $x \rightarrow e^{-x^2}$. Diese ist natürlich stetig, besitzt also sicherlich eine Stammfunktion. Mit starken mathematischen Mittel kann man beweisen, dass sich diese Stammfunktion nicht durch eine gewöhnliche Formel beschreiben lässt, in der nur Potenzfunktionen, trigonometrische Funktionen, Exponentialfunktionen und zu diesen inverse Funktionen vorkommen: sie ist nicht elementar ausdrückbar. Es ist zwar klar, dass es neben den elementar ausdrückbaren Funktionen noch andere Funktionen geben muss, dass aber darunter sogar Funktionen zu finden sind, die als Stammfunktionen von elementar ausdrückbaren Funktionen auftreten, ist doch eine recht überraschende Tatsache.

Trotz all dieser Schwierigkeiten kennt man eine Anzahl Techniken, die beim Integrieren nützlich sind; wir besprechen in den folgenden zwei Abschnitten zwei davon, nämlich die Methode der partiellen Integration und die Methode der Substitution.