

2 Der Hauptsatz der Infinitesimalrechnung

Unser nächstes Ziel ist es, den sogenannten Hauptsatz der Infinitesimalrechnung herzuleiten, welcher auf völlig überraschende Weise das bestimmte Integral mit der Differentialrechnung verbindet. Dazu brauchen wir einige Vorbereitungen.

Es sei m das globale Minimum und M das globale Maximum der Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$. Dann gilt auf den Intervall $[a, b]$

$$m \leq f(x) \leq M ,$$

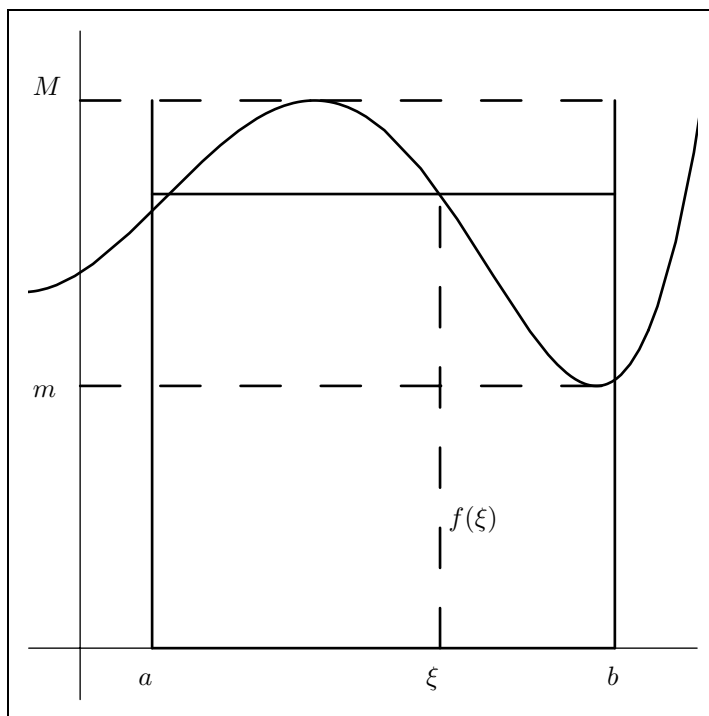


FIG. 1:
Mittelwertsatz der
Integralrechnung

und man erhält

$$m(b-a) = \int_a^b m \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b M \, dx = M(b-a)$$

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \leq M .$$

Da eine stetige Funktion nach dem Zwischenwertsatz (siehe Kapitel I, Abschnitt 4) jeden Wert zwischen m und M mindestens einmal annimmt, folgt aus dieser Überlegung das folgende Resultat.

Mittelwertsatz der Integralrechnung *Es existiert ξ in $[a, b]$ mit*

$$(b-a)f(\xi) = \int_a^b f(x) dx .$$

Beispiel In konkreten Fällen lässt sich ein solches ξ explizit angeben. Aus

$$\int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}$$

folgt zum Beispiel

$$f(\xi) = \xi^2 = \frac{b^3}{3b} = \frac{b^2}{3} ,$$

so dass sich $\xi = b\sqrt{3}/3$ ergibt.

Mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung leiten wir jetzt den Hauptsatz der Infinitesimalrechnung her. Zu diesem Zweck betrachten wir eine auf dem Intervall $[a, b]$ stetige Funktion $f : x \rightarrow f(x)$ und definieren eine Funktion F_a durch die Vorschrift

$$F_a : x \rightarrow \int_a^x f(t) dt, \quad D(F_a) = [a, b].$$

Dann gilt (siehe Figur 2)

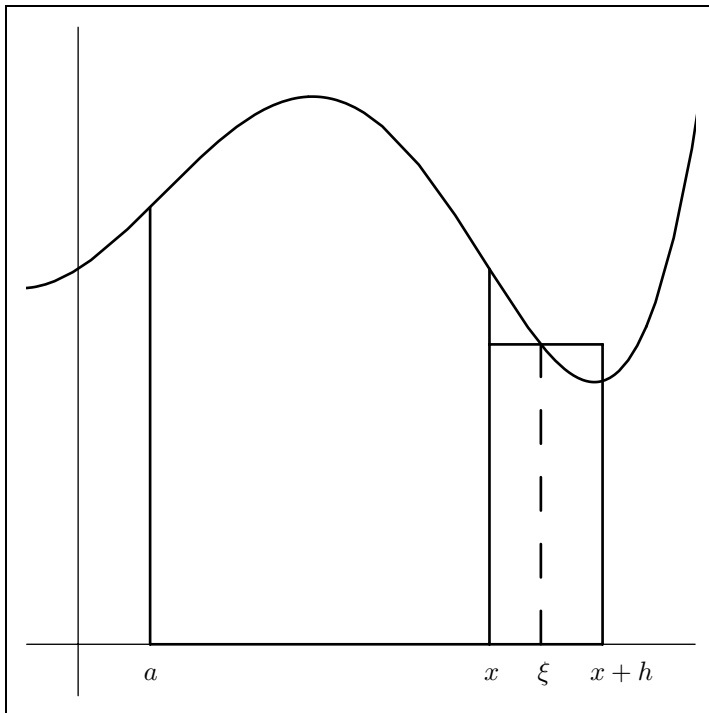


FIG. 2:
Hauptsatz der
Infinitesimalrechnung

$$\begin{aligned}
 \frac{dF_a}{dx}(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt .
 \end{aligned}$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung existiert nun ein ξ zwischen x und $x+h$ mit der Eigenschaft

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = f(\xi) .$$

Damit erhalten wir

$$\frac{dF_a}{dx}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = f(x) ,$$

weil mit $h \rightarrow 0$ die Grösse ξ gegen x strebt und weil f stetig ist. Damit haben wir die folgende Aussage erhalten.

Hauptsatz der Infinitesimalrechnung (I. Newton 1642 - 1727, G.F. Leibniz 1646-1716)
Die Ableitung eines bestimmten Integrals über eine stetige Funktion f nach der oberen Integrationsgrenze ist gleich dem Wert des Integranden an dieser Grenze:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) .$$

Eine Funktion $F : x \rightarrow F(x)$ mit $F'(x) = f(x)$ heisst eine **Stammfunktion** von $f : x \rightarrow f(x)$. Laut dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung existiert zu einer stetigen Funktion $f : x \rightarrow f(x)$ immer (mindestens) eine Stammfunktion nämlich

$$F_a : x \rightarrow \int_a^x f(t) dt .$$

- Ist $F : x \rightarrow F(x)$ eine Stammfunktion von $f : x \rightarrow f(x)$, so ist auch $F + C : x \rightarrow F(x) + C$ eine Stammfunktion von $f : x \rightarrow f(x)$.
- Sind $F : x \rightarrow F(x)$ und $G : x \rightarrow G(x)$ Stammfunktionen von $f : x \rightarrow f(x)$, so gibt es eine reelle Konstante C mit $G(x) \equiv F(x) + C$.

Beispiel Die Funktionen $F : x \rightarrow \sin^2 x$ und $G : x \rightarrow -\frac{1}{2} \cos 2x$ haben beide die Ableitung

$$F'(x) = G'(x) = 2 \sin x \cos x .$$

Es sind also sowohl F wie G Stammfunktionen von $f : x \rightarrow 2 \sin x \cos x$. Sie unterscheiden sich deshalb nur um eine additive Konstante C :

$$G(x) \equiv -\frac{1}{2} \cos 2x \equiv \sin^2 x + C \equiv F(x) + C .$$

Setzt man $x = 0$, so erhält man $C = -1/2$. Damit haben wir die (bekannte) Identität

$$\sin^2 x \equiv \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

bewiesen.

Der Hauptsatz der Infinitesimalrechnung zusammen mit den obigen Bemerkungen liefert die Möglichkeit, bestimmte Integrale auf sehr einfache Weise zu berechnen. Mit unseren Bezeichnungen ist

$$\int_a^b f(t) dt = F_a(b) .$$

Ist nun $F : x \rightarrow F(x)$ irgendeine Stammfunktion von $f : x \rightarrow f(x)$, so gilt nach obigem

$$F_a(x) \equiv F(x) + C .$$

In dieser Gleichung kann man die Konstante C bestimmen, indem man $x = a$ setzt; dann gilt nämlich $F_a(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$, und es folgt $C = -F(a)$. Man erhält für den Wert des bestimmten Integrals die Formel

$$F_a(b) = \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) .$$

Damit haben wir die folgende zentrale Aussage der Infinitesimalrechnung bewiesen, welche die Berechnung bestimmter Integrale auf die Berechnung einer Stammfunktion des Integranden reduziert.

Satz Ist $f : x \rightarrow f(x)$ eine auf $[a, b]$ stetige Funktion und ist $F : x \rightarrow F(x)$ eine Stammfunktion von f , so gilt

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) .$$

Für die Differenz $F(b) - F(a)$ schreiben wir im folgenden oft kurz $[F(x)]_a^b$ oder $F(x)|_a^b$.

Beispiel

$$\int_a^b x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_a^b = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} .$$

Beispiel

$$\int_0^{\pi/2} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = -\cos(\pi/2) - (-\cos 0) = 0 + 1 = 1 .$$