

7 Flächenberechnung

Der Ursprung des Begriffs des bestimmten Integrals ist zweifellos die Frage nach dem Flächeninhalt eines durch Kurven begrenzten Gebietes. Darüber hinaus haben sich im Laufe der Zeit viele weitere Anwendungen ergeben, die nichts mehr mit dem ursprünglichen Problem zu tun haben. Über solche Anwendungen werden die folgenden 6 Abschnitte handeln. In jedem Fall ist es die Riemann'sche Form der Definition des bestimmten Integrals, durch welche die Verbindung hergestellt wird. Im vorliegenden Abschnitt kehren wir zuerst noch einmal zum Problem der Flächenberechnung zurück.

Ist eine Kurve K im (x, y) -Koordinatensystem gegeben so stellen wir die Frage nach dem Flächeninhalt I der Fläche unter der Kurve (siehe Figur 1). Ist K als Graph einer (stetigen) Funktion f gegeben, so ist I einfach der Wert des bestimmten Integrals

$$I = \int_a^b f(x) \, dx .$$

Es sei nun K durch eine Parameterdarstellung

$$\vec{r}: t \rightarrow (x(t), y(t)) , \quad t_A \leq t \leq t_B$$

gegeben, wobei wir annehmen, dass die Funktionen $t \rightarrow x(t)$, $t \rightarrow y(t)$ stetig differenzierbar sind, und dass im ganzen Intervall $\dot{x}(t) > 0$ gilt. Letztere Voraussetzung besagt, dass der Kurvenpunkt sich mit wachsendem t nach rechts bewegt, denn die Funktion $t \rightarrow x(t)$ ist monoton wachsend. Um den Flächeninhalt I zu bestimmen, approximieren wir die Fläche durch Rechtecke, welche zu einer Einteilung

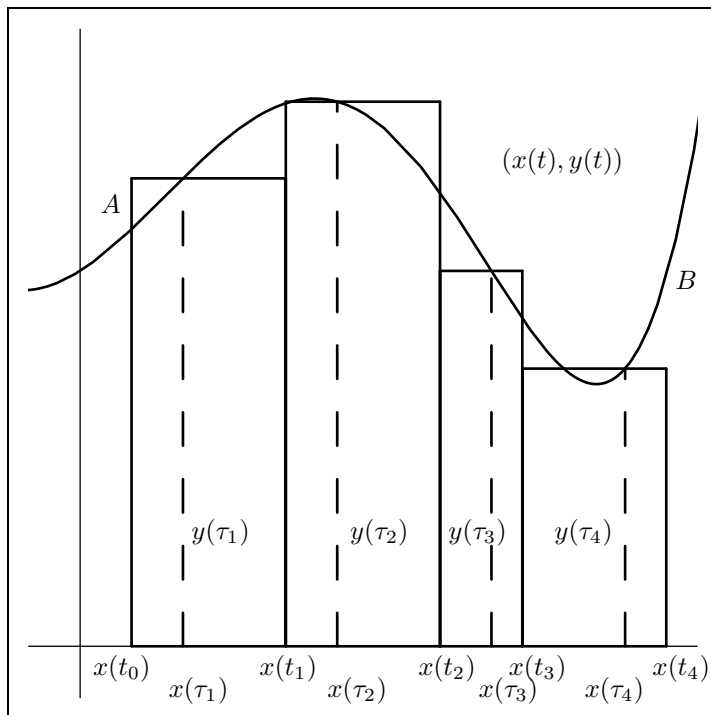
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

des Intervalles $[a, b]$ mit Zwischenpunkten ξ_k gehören, wobei wir die Zwischenpunkte ξ_k für unsere Zwecke geschickt wählen. Es sei t_k für $k = 0, 1, \dots, n$ der (eindeutig bestimmte) Parameterwert mit $x_k = x(t_k)$. Die Parameterwerte t_k liefern wegen der Monotonität von $t \rightarrow x(t)$ eine Einteilung des Intervalles $[t_A, t_B]$

$$t_A = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t_B .$$

In jedem Intervall $[t_{k-1}, t_k]$ wählen wir mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung ein τ_k mit

$$x(t_k) - x(t_{k-1}) = \dot{x}(\tau_k) \cdot (t_k - t_{k-1}) .$$


 FIG. 1:
Fläche unter der Kurve

Natürlich gilt

$$x_{k-1} = x(t_{k-1}) \leq x(\tau_k) \leq x(t_k) = x_k$$

wiederum wegen der Monotonität der Funktion $t \rightarrow x(t)$. Die Werte ξ_k , $\xi_k = x(\tau_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$ wählen wir als Zwischenpunkte für unsere Einteilung des Intervalles $[a, b]$. Für die Summe der Inhalte der zugehörigen Rechtecke erhalten wir dann

$$\begin{aligned} y(\tau_1)(x_1 - x_0) + y(\tau_2)(x_2 - x_1) + \dots + y(\tau_n)(x_n - x_{n-1}) = \\ = y(\tau_1)\dot{x}(\tau_1)(t_1 - t_0) + y(\tau_2)\dot{x}(\tau_2)(t_2 - t_1) + \dots + y(\tau_n)\dot{x}(\tau_n)(t_n - t_{n-1}) . \end{aligned}$$

Letzteres ist aber gerade die Riemann'sche Summe für die Funktion $t \rightarrow y(t)\dot{x}(t)$, welche zur Einteilung

$$t_A = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t_B$$

des Intervalles $[t_A, t_B]$ mit Zwischenpunkten τ_k , $k = 1, 2, \dots, n$ gehört. Laut Definition des bestimmten Integrals gilt somit für den gesuchten Flächeninhalt

$$I = \int_{t_A}^{t_B} y(t) \dot{x}(t) dt .$$

Diese mathematisch exakte, aber etwas langatmige Herleitung zeigt eindringlich die Nützlichkeit der Riemann'schen Definition des bestimmten Integrals. Mit etwas Erfahrung erlaubt sich der Anwender diese Formel auf heuristische Art wie folgt "herzuleiten". Es gilt (siehe Figur 2)

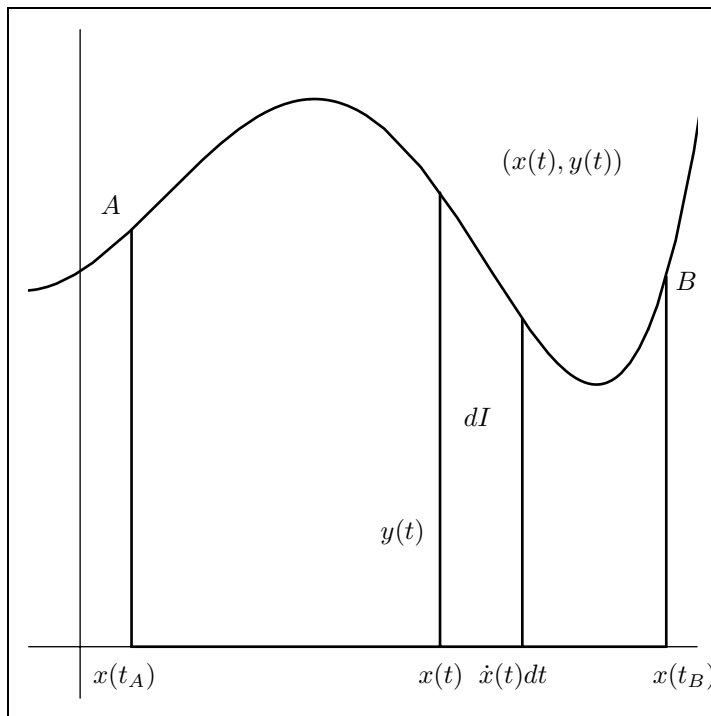


FIG. 2:
Fläche unter der Kurve

$$dI = y(t) dx .$$

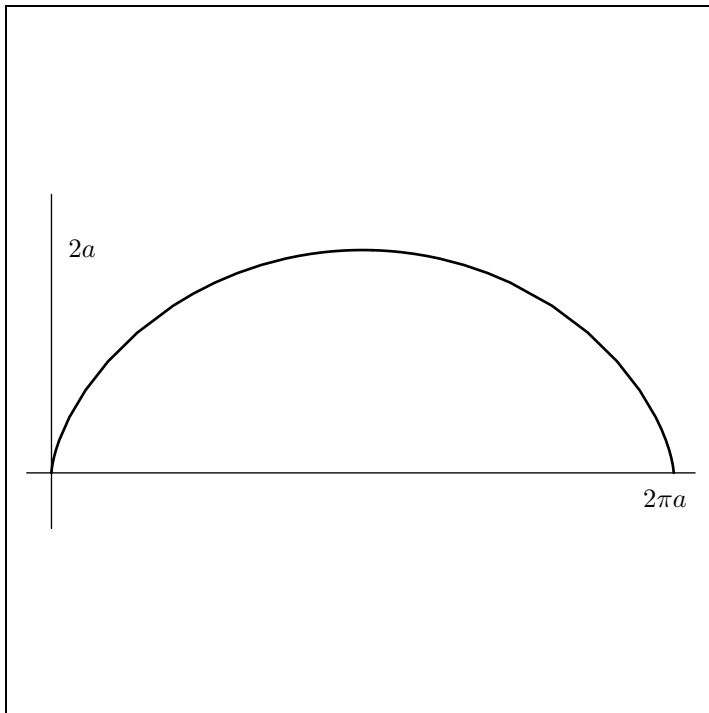
Mit $dx = \dot{x}(t) dt$ erhält man

$$dI = y(t) \dot{x}(t) dt$$

und damit

$$I = \int dI = \int_{t_A}^{t_B} y(t) \dot{x}(t) dt .$$

Diese Art der Herleitung ist zwar kurz und einprägsam, der Unerfahrene macht aber bei solchen und ähnlichen Überlegungen gerne Fehler. Erst mit der Zeit entwickelt man ein intuitives Gefühl dafür, was für Manipulationen dieser Art erlaubt sind.


 FIG. 3 :
Zykloide

Beispiel Gesucht ist der Inhalt der Fläche unter einem Zykloidenbogen (siehe Figur 3). Die Zykloide ist gegeben durch die Parameterdarstellung

$$t \rightarrow (x(t), y(t)) = (at - a \sin t, a - a \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Der gesuchte Flächeninhalt I ist somit

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} (a - a \cos t)(a - a \cos t) dt \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) dt \\ &= a^2(2\pi - 0 + \pi) \\ &= 3\pi a^2. \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt ist also gerade dreimal so gross wie derjenige des Kreises, der die Zykloide erzeugt.

Wird in der ursprünglichen Aufgabe die Kurve K mit wachsendem t von rechts nach links durchlaufen, d.h. gilt $\dot{x}(t) < 0$ für $t_A \leq t \leq t_B$, so liefert das Integral

$$I = \int_{t_A}^{t_B} y(t) \dot{x}(t) dt$$

offensichtlich den *negativen* Inhalt der Fläche unter der Kurve. Von dieser Bemerkung machen wir in der folgenden Anwendung Gebrauch.

Oft ist man nicht am Inhalt der Fläche unter der Kurve sondern am Inhalt der Sektorfläche interessiert. In der Figur 4 liest man unmittelbar ab

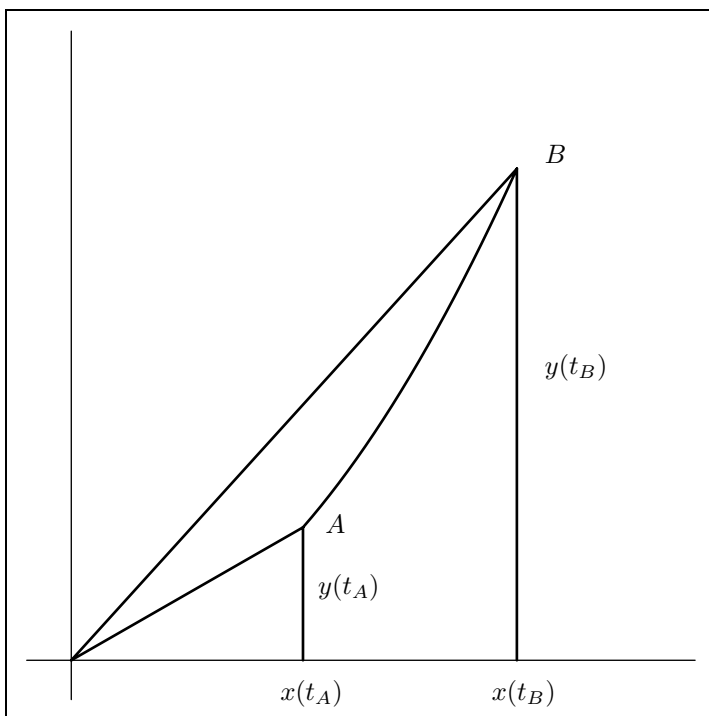


FIG. 4:
Sektorfläche

$$I_S = \frac{1}{2} x(t_B) y(t_B) - \frac{1}{2} x(t_A) y(t_A) - \int_{t_A}^{t_B} y(t) \dot{x}(t) dt .$$

Nun gilt

$$\frac{d}{dt} x(t) y(t) = \dot{x}(t) y(t) + x(t) \dot{y}(t) ,$$

so dass wir schreiben können

$$x(t_B) y(t_B) - x(t_A) y(t_A) = \int_{t_A}^{t_B} (\dot{x}(t) y(t) + x(t) \dot{y}(t)) dt .$$

Damit ergibt sich die folgende Formel für die Sektorfläche

$$I_S = \frac{1}{2} \int_{t_A}^{t_B} (x(t) \dot{y}(t) - \dot{x}(t) y(t)) dt .$$

Eine genaue Analyse zeigt, dass dieses Integral einen *positiven* Wert liefert, wenn die Sektorfläche *links* von der Kurve liegt (wie in der Figur 4) und einen *negativen* Wert, wenn die Sektorfläche *rechts* von der Kurve liegt.

Beispiel Gesucht ist die Ellipsenfläche F . Die Ellipse mit Halbachsen a und b und Mittelpunkt O ist durch die Parameterdarstellung

$$t \rightarrow (x(t), y(t)) = (a \cos t, b \sin t) , \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

gegeben. Die Ellipsenfläche kann als Sektorfläche angesehen werden, wenn t von 0 bis 2π variiert. Wir erhalten

$$F = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (ab \cos^2 t + ab \sin^2 t) dt = \frac{1}{2} ab 2\pi = ab\pi .$$

Beispiel Die Parameterdarstellung

$$t \rightarrow (x(t), y(t)) = (\cosh t, \sinh t)$$

beschreibt bekanntlich den rechten Ast einer Hyperbel. Gesucht ist die Sektorfläche H , die zu den Punkten mit $t = 0$ und $t = T$ gehört. Wir erhalten

$$H = \frac{1}{2} \int_0^T (\cosh^2 t - \sinh^2 t) dt = \frac{1}{2} \int_0^T 1 dt = \frac{1}{2} T .$$

Dieses Resultat ist natürlich der Grund für die Tatsache, dass die Umkehrfunktionen Arcosh und Arsinh von \cosh und \sinh "Area"-Funktionen genannt werden (Area = Flächeninhalt).

Ist schliesslich die Kurve K durch Polarkoordinaten ρ, φ gegeben, so lässt sich die entsprechende Formel für den Inhalt der Sektorfläche zwischen φ_A und φ_B sehr leicht herleiten. Man geht von der Darstellung durch Polarkoordinaten einfach zur zugehörigen Parameterdarstellung über. Es sei K durch die Gleichung $\rho = \rho(\varphi)$ gegeben. Dann ist

$$\varphi \rightarrow (x(\varphi), y(\varphi)) = (\rho(\varphi) \cos \varphi, \rho(\varphi) \sin \varphi)$$

die zugehörige Parameterdarstellung mit Parameter φ , und man erhält für den Inhalt der Sektorfläche

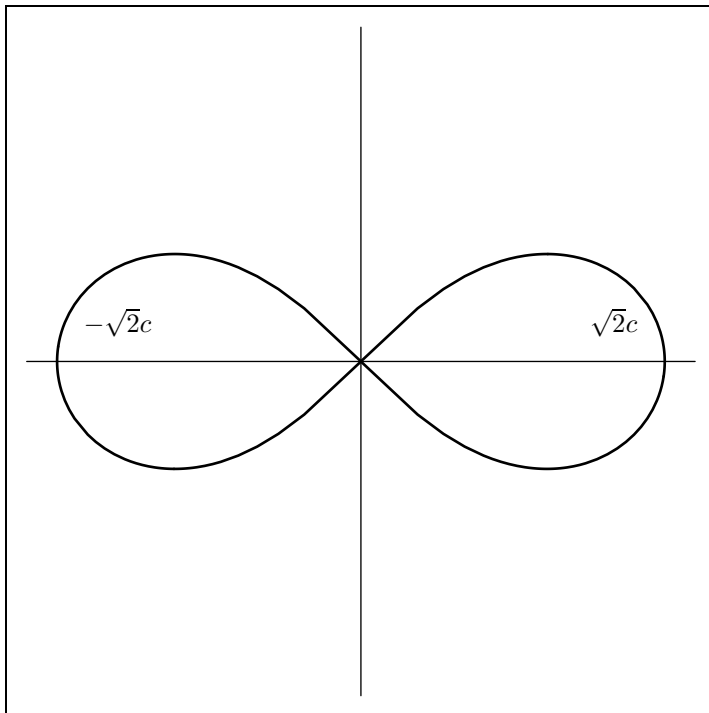


FIG. 5 :
Lemniskate

$$\begin{aligned}
 I_S &= \frac{1}{2} \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} (x\dot{y} - \dot{x}y) d\varphi \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} (\rho \cos \varphi (\dot{\rho} \sin \varphi + \rho \cos \varphi) - (\dot{\rho} \cos \varphi - \rho \sin \varphi) \rho \sin \varphi) d\varphi \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \rho^2 d\varphi .
 \end{aligned}$$

Beispiel Die Gleichung $\rho = \sqrt{2} c \sqrt{\cos 2\varphi}$ in Polarkoordinaten stellt eine sogenannte Lemniskate (siehe Figur 5) dar. Der Inhalt des durch die zu $-\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/4$ gehörigen Kurve eingeschlossenen Flächenstücks ergibt sich nach obigem zu

$$I_S = \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{+\pi/4} 2c^2 \cos 2\varphi d\varphi = c^2 .$$