

## 8 Bogenlänge

Eine Kurve  $K$  im Raum lässt sich mit Hilfe einer Parameterdarstellung

$$\vec{r}: t \rightarrow \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t_A \leq t \leq t_B$$

beschreiben. In natürlicher Weise tritt eine solche Parameterdarstellung etwa auf, wenn die Bewegung eines Massenpunktes beschrieben werden soll; dann bezeichnet  $\vec{OP} = \vec{r}(t)$  den Ort, an dem sich der Massenpunkt zur Zeit  $t$  befindet. Bekanntlich ist dann  $\dot{\vec{r}}(t)$  die (vektorielle) Geschwindigkeit des Massenpunktes zur Zeit  $t$ . Ist die Bahn des Massenpunktes bekannt, so ist es naheliegend, nach der Länge des zurückgelegten Weges zu fragen, d.h. nach der **Bogenlänge** der Kurve  $K$ . Damit wollen wir uns in diesem Abschnitt befassen.

Wir definieren die Bogenlänge der Kurve  $K$  durch das Integral

$$s_A^B = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2} dt = \int_{t_A}^{t_B} |\dot{\vec{r}}(t)| dt .$$

Dass diese Definition vernünftig ist, zeigt die folgende *heuristische* Überlegung. “Im Kleinen” kann die Kurve  $K$  als Teil einer Geraden aufgefasst werden, dessen Länge sich als Diagonale in einem Quader mit den Seitenlängen  $dx, dy, dz$  leicht zu

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

berechnet. Setzt man die Koordinatendifferenzen  $dx, dy, dz$  wie üblich den Differentialen gleich

$$\begin{aligned} dx &= \dot{x}(t)dt , \\ dy &= \dot{y}(t)dt , \\ dz &= \dot{z}(t)dt , \end{aligned}$$

so erhält man

$$ds = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2} dt .$$

Die Länge eines “endlichen” Kurvenstücks ergibt sich dann durch Integration, d.h. durch Summierung der “infinitesimalen” Anteile. Dies liefert das oben angegebene Integral.

**Bemerkung** Wir haben hier mit Absicht nicht von einer Herleitung gesprochen. Eine genauere Analyse zeigt nämlich, dass dem Begriff der Bogenlänge einer Kurve erst mit der angegebenen

Formel überhaupt einen Inhalt erhält. Um der logischen Korrektheit Genüge zu tun, muss der Mathematiker an dieser Stelle zeigen, dass die heuristisch gefundene Formel sinnvoll ist. Dazu gehört zum Beispiel die Tatsache, dass die durch diese Formel gelieferte Bogenlänge unter vernünftigen Bedingungen nicht von der gewählten Parametrisierung der Kurve abhängig ist. Auf diese Probleme wollen wir hier natürlich nicht eingehen; wir überlassen sie gerne den Mathematikern.

**Beispiel** Gesucht ist die Länge eines Zykloidenbogens.

Der Zykloidenbogen ist durch

$$t \rightarrow (x(t), y(t)) = (at - a \sin t, a - a \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

gegeben, mit  $t_A = 0, t_B = 2\pi$ . Wir erhalten  $\dot{x}(t) = a - a \cos t, \dot{y}(t) = a \sin t$  und damit

$$\begin{aligned} s_A^B &= \int_0^{2\pi} (a^2 - 2a^2 \cos t + a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t)^{1/2} dt \\ &= a \int_0^{2\pi} (2(1 - \cos t))^{1/2} dt \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \sin^2(t/2)} dt \\ &= 2a \int_0^{2\pi} |\sin(t/2)| dt \\ &= 2a \int_0^{2\pi} \sin(t/2) dt \\ &= 2a [-2 \cos(t/2)]_0^{2\pi} \\ &= 2a(2 + 2) \\ &= 8a. \end{aligned}$$

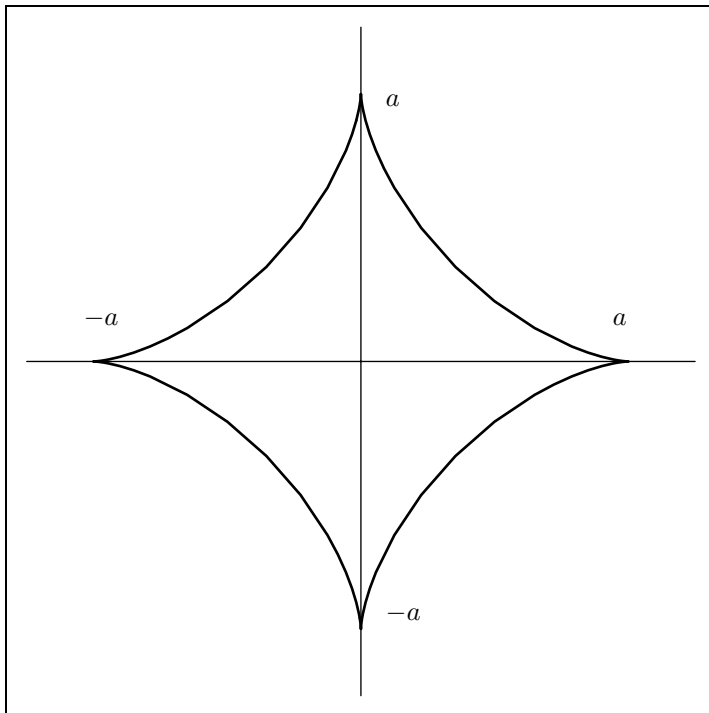
Man stellt die überraschende Tatsache fest, dass beim Rollen eines Kreises auf einer Geraden der von einem Punkt der Kreisperipherie zurückgelegte Weg ein *ganzzahliges* Vielfaches des Radius des Kreises ist.

**Beispiel** Die Astroide (siehe Figur 1) ist gegeben durch die Parameterdarstellung

$$t \rightarrow (x(t), y(t)) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Gesucht ist die Bogenlänge der Kurve.

Wegen  $\dot{x}(t) = -3a \cos^2 t \sin t, \dot{y}(t) = 3a \sin^2 t \cos t$  und wegen der offensichtlichen Symmetrie der Kurve erhält man für die Bogenlänge


 FIG. 1 :  
Astroide

$$\begin{aligned}
 L &= 4 \int_0^{\pi/2} 3a \sqrt{\cos^4 t \cdot \sin^2 t + \sin^4 t \cdot \cos^2 t} dt \\
 &= 4 \cdot 3 \cdot a \int_0^{\pi/2} \cos t \sin t \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} dt \\
 &= 6a [\sin^2 t]_0^{\pi/2} \\
 &= 6a .
 \end{aligned}$$

Wiederum ist überraschenderweise die Länge der Kurve ein ganzzahliges Vielfaches der in der Parameterdarstellung vorkommenden Grösse  $a$ .

Ist die Kurve  $K$  in expliziter Form  $y = f(x)$  gegeben, so gehen wir wie üblich im ersten Schritt zur zugehörigen Parameterdarstellung  $x \rightarrow (x, f(x))$  über. Wir erhalten dann für die Bogenlänge zwischen den Punkten  $A$  und  $B$

$$s_A^B = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx ,$$

wobei  $x_A$  die  $x$ -Koordinate des Punktes  $A$  und  $x_B$  diejenige des Punktes  $B$  bezeichnet.

**Beispiel** Man bestimme die Länge der Kurve  $y = x^2$  zwischen den Punkten  $A = (-1, 1)$  und  $B = (1, 1)$ .

Nach obigem gilt

$$s_A^B = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx = 2 \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx .$$

Für das Integral machen wir die Substitution  $2x = u$ ,  $2dx = du$  und erhalten

$$\begin{aligned} s_A^B &= \int_0^2 \sqrt{1 + u^2} du \\ &= \frac{1}{2} \left[ \operatorname{Arsinh} u + u \sqrt{u^2 + 1} \right]_0^2 \\ &= \frac{1}{2} \left( \operatorname{Arsinh} 2 + 2\sqrt{5} \right) . \end{aligned}$$

Schliesslich behandeln wir noch den Fall, wo die Kurve  $K$  durch eine Gleichung in Polarkoordinaten gegeben ist. Ähnlich wie oben gehen wir in einem ersten Schritt zur zugehörigen Parameterdarstellung mit Parameter  $\varphi$  über. Wir erhalten nach kurzer Rechnung

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}(\varphi) &= (\dot{\rho}(\varphi) \cos \varphi - \rho(\varphi) \sin \varphi, \dot{\rho}(\varphi) \sin \varphi + \rho(\varphi) \cos \varphi) \\ |\dot{\vec{r}}(\varphi)| &= (\dot{\rho}^2 \cos^2 \varphi - 2\dot{\rho}\rho \cos \varphi \sin \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi + \dot{\rho}^2 \sin^2 \varphi + 2\dot{\rho}\rho \sin \varphi \cos \varphi + \rho^2 \cos^2 \varphi)^{1/2} \\ &= (\rho^2 + \dot{\rho}^2)^{1/2} . \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$s_A^B = \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2} d\varphi .$$

**Beispiel** Man berechne die Bogenlänge der logarithmischen Spirale  $\rho = e^{k\varphi}$  zwischen den Punkten  $A$  und  $B$  (siehe Figur 2).

Aus der obigen Überlegung erhalten wir mit  $\dot{\rho}(\varphi) = k \cdot e^{k\varphi}$

$$\begin{aligned} s_A^B &= \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \sqrt{e^{2k\varphi} + k^2 e^{2k\varphi}} d\varphi \\ &= \sqrt{1 + k^2} \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} e^{k\varphi} d\varphi \\ &= \sqrt{1 + k^2} \left[ \frac{1}{k} e^{k\varphi} \right]_{\varphi_A}^{\varphi_B} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{1 + 1/k^2} \left( e^{k\varphi_B} - e^{k\varphi_A} \right) \\
 &= \sqrt{1 + 1/k^2} (\rho_B - \rho_A) .
 \end{aligned}$$

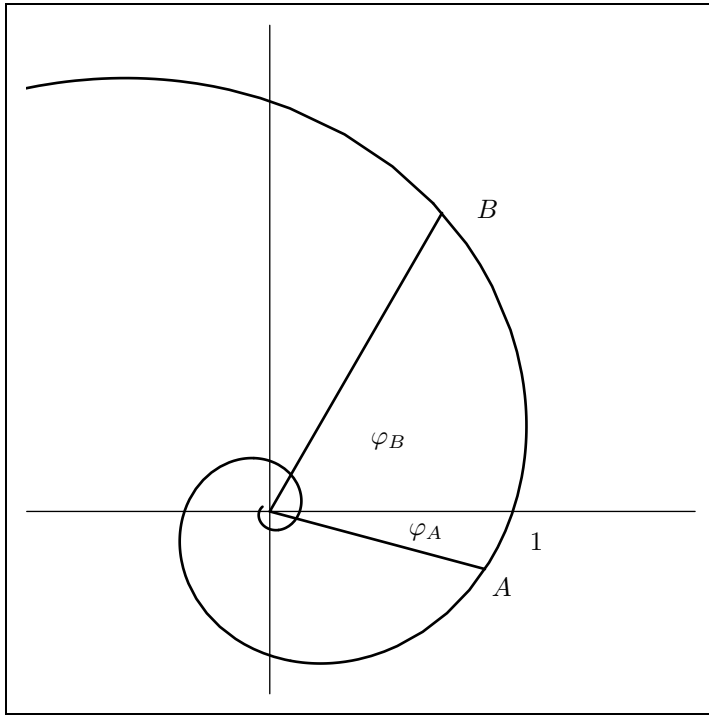


FIG. 2:  
Logarithmische Spirale

Wiederum hat die logarithmische Spirale eine Überraschung für uns bereit: Das Resultat besagt, dass sich in Kreisingen gleicher Breite  $b = \rho_B - \rho_A$  gleichlange Kurvenstücke der logarithmischen Spirale befinden.

**Beispiel** Wir betrachten zum Schluss dieses Abschnittes die sogenannte Klotoide; sie wird durch die Parameterdarstellung  $t \rightarrow (x(t), y(t))$ , beschrieben, wobei  $x(t)$  und  $y(t)$  durch die (komplizierten) Formeln

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \int_0^t \cos\left(\frac{a}{2} u^2\right) du , \\
 y(t) &= \int_0^t \sin\left(\frac{a}{2} u^2\right) du .
 \end{aligned}$$

gegeben sind. (Man beachte, dass  $u$  eine Integrationsvariable ist, der Kurvenparameter heisst wie üblich  $t$ .) Wie man zeigen kann, sind die hier vorkommenden Integrale nicht elementar ausdrückbar. Wir berechnen die Bogenlänge dieser Kurve zwischen den Punkten  $A$  und  $B$  der

Kurve, wobei wir für  $A$  den zum Parameterwert  $t = 0$  gehörigen Punkt, also den Nullpunkt des Koordinatensystems wählen, und für  $B$  den zum Parameterwert  $T$  gehörigen Punkt. Wegen

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \cos\left(\frac{a}{2} t^2\right) \\ \dot{y}(t) &= \sin\left(\frac{a}{2} t^2\right)\end{aligned}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}s_A^B &= \int_0^T \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \\ &= \int_0^T \sqrt{\cos^2\left(\frac{a}{2} t^2\right) + \sin^2\left(\frac{a}{2} t^2\right)} dt \\ &= \int_0^T 1 dt \\ &= T .\end{aligned}$$

Unser Parameter  $t$  ist also gleichzeitig die vom Ursprung des Koordinatensystems aus gemessene Bogenlänge der Kurve. Berechnen wir die Krümmung der Klotoiden, so erhalten wir wegen

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) &= -at \sin\left(\frac{a}{2} t^2\right) \\ \ddot{y}(t) &= at \cos\left(\frac{a}{2} t^2\right)\end{aligned}$$

mit der Krümmungsformel

$$k(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{at (\cos^2(\frac{a}{2} t^2) + \sin^2(\frac{a}{2} t^2))}{1} = at .$$

Unsere Klotoiden hat die interessante Eigenschaft, dass die Krümmung proportional zur Bogenlänge ist. Durchläuft man die Klotoiden mit konstanter Schnelligkeit, so nimmt die Krümmung, also der Steuereinschlag bei der Fahrt, proportional zur Zeit zu (oder ab): Für ein angenehmes Befahren müssten Strassenkurven aus diesem Grunde eigentlich aus Klotoidenstücken (und Kreisstücken) zusammengesetzt sein.

Wir haben in diesem letzten Beispiel eine Kurve vor uns, welche durch eine Parameterdarstellung mit der Bogenlänge als Parameter gegeben ist. Für viele theoretische Überlegungen ist es am einfachsten, von einer solchen Kurvendarstellung auszugehen. Interpretiert man die Parameterdarstellung als Bewegung eines Massenpunktes, so bedeutet dies, dass die Kurve mit konstanter Schnelligkeit 1 durchlaufen wird; konsequenterweise ist dann  $|\vec{r}'(t)| \equiv 1$ .