

1 Das bestimmte Integral

Obwohl die folgenden Begriffsbildungen auch in einem allgemeineren Rahmen möglich sind, setzen wir *im ganzen Kapitel voraus, dass alle betrachteten Funktionen stetig sind*. Dies macht die Darstellung besonders einfach.

Definition (B. Riemann 1826-1866) Gegeben sei eine Funktion $f : x \rightarrow f(x)$ und ein im Definitionsbereich von f liegendes Intervall $[a, b]$.

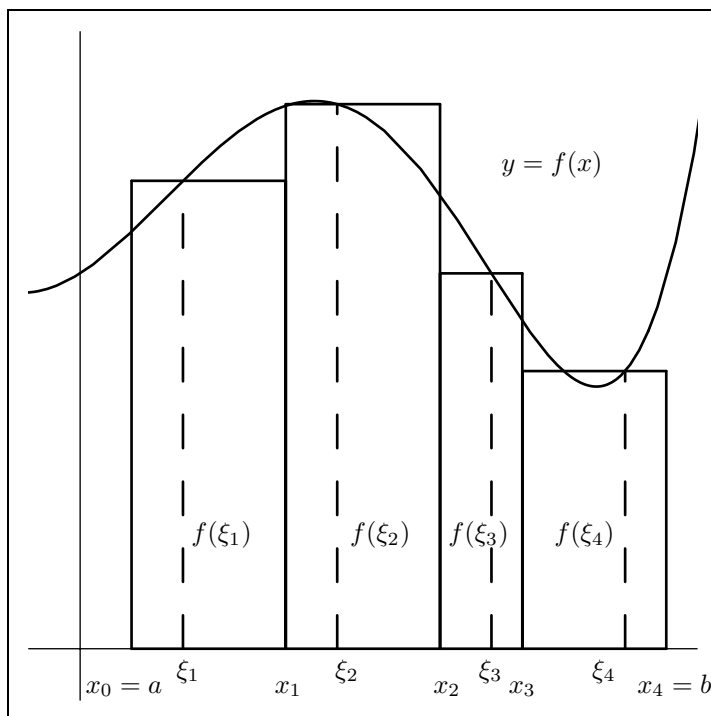


FIG. 1:
Riemann'sches Integral

- (a) Wähle eine *Einteilung* von $[a, b]$ durch endlich viele Punkte

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

in Teilintervalle.

- (b) Wähle für $k = 1, 2, \dots, n$ Zwischenpunkte ξ_k mit $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$. Die *Feinheit* der Einteilung ist definiert durch $\max_{k=1,2,\dots,n} |x_k - x_{k-1}|$.

- (c) Der gewählten Einteilung von $[a, b]$ mit Zwischenpunkten ξ_k wird die *Riemann'sche Summe*

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$$

zugeordnet, wobei wir $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ gesetzt haben.

- (d) Definiere das **Riemann'sche Integral** durch

$$\int_a^b f(x)dx = \lim \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k .$$

Dabei ist für den Grenzübergang eine Folge von Einteilungen zugrunde zu legen, deren Feinheit gegen Null strebt.

In diesem Symbol heisst $f(x)$ der *Integrand*, die Grösse a die *untere* und b die *obere* (Integrations-) Grenze.

Es gilt nun das folgende grundlegende **Resultat**, welches wir ohne Beweis angeben:

Für eine stetige Funktion f existiert der Limes in (d) immer, und sein Wert ist unabhängig von der Wahl der Folge der Einteilungen und der Zwischenpunkte.

Es ist nach dieser Definition anschaulich klar, dass das Riemann'sche Integral den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion und der x -Achse beschreibt, und zwar werden die Flächenanteile oberhalb der x -Achse positiv, die Anteile unterhalb der x -Achse negativ gezählt.

Beispiel Es sei $f(x) = C > 0$. Dann folgt

$$\int_a^b C dx = C(b - a) .$$

In diesem Fall ist das Integral gerade die Fläche des Rechtecks.

Beispiel Es sei $f : x \longrightarrow x^2$. Dann ist

$$\int_0^b x^2 dx$$

der Inhalt der Fläche unter der Parabel $y = x^2$ zwischen den x -Werten 0 und b . Lange vor Erfindung der Integralrechnung wurde dieser Flächeninhalt mit anderen Methoden von Archimedes (287-212 v.Chr.) bestimmt. Hier benützen wir natürlich die oben gegebene Definition des bestimmten Integrals. Da der Wert des Riemann'schen Integrales von der gewählten Einteilung und den gewählten Zwischenpunkten unabhängig ist, dürfen wir

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}b, x_2 = \frac{2}{n}b, \dots, x_n = \frac{n}{n}b = b$$

$$\xi_k = x_k, k = 1, \dots, n$$

setzen (siehe Figur 2). Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} \int_0^b x^2 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \dots + f(x_n)\Delta x_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{n}b \right)^2 + \left(\frac{2}{n}b \right)^2 + \dots + \left(\frac{n}{n}b \right)^2 \right) \cdot \frac{b}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) \frac{b^3}{n^3} . \end{aligned}$$

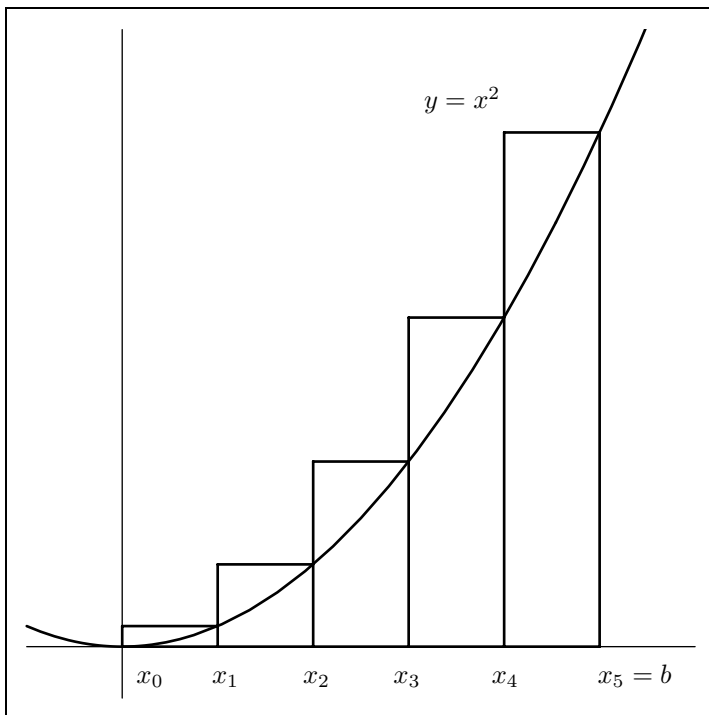


FIG. 2 :
Parabelfläche

Nun gilt $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, wie man leicht mit vollständiger Induktion nach n beweisen kann, und damit folgt

$$\int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} \frac{(n+1)}{n} \frac{(2n+1)}{n} = \frac{b^3}{3} .$$

Laut Definition des Riemann'schen Integrals gelten gewisse offensichtliche **Rechenregeln**, von denen wir die folgenden explizit erwähnen:

- Das bestimmte Integral ist eine *lineare* Operation. Es gilt

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$
$$\int_a^b C f(x)dx = C \int_a^b f(x)dx, C \in \mathbb{R}.$$

- Ist $a > b$, so kehren sich die Vorzeichen der Δx_k um. Damit folgt

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

und daraus ergibt sich insbesondere

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

- Hat man die zwei Intervalle $[a, b]$ und $[b, c]$ vor sich, so liefern Einteilungen davon zusammen genommen eine Einteilung des Intervalles $[a, c]$. Folglich gilt

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx.$$

- Der Wert des bestimmten Integrales ist unabhängig vom Namen der Integrationsvariablen; es gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \dots$$

Die Integrationsvariable übernimmt nur die Rolle einer Hilfsgrösse für die Rechnung.