

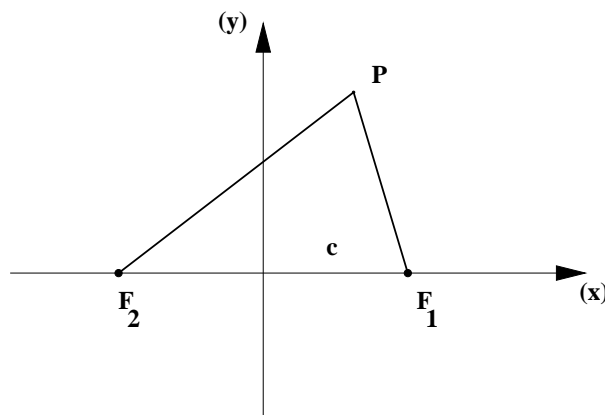
U. Stambach: Analysis I/II

... und das setzen wir als wohlbekannt voraus!

Ellipse und Hyperbel

Wir konzentrieren uns hier auf die Ellipse und verwenden für die Bemerkungen zur Hyperbel eine kleinere Schrift.

In der Ebene E seien zwei Punkte F_1 und F_2 gegeben. Ihr Abstand sei $2c$. Ferner sei eine Zahl $a > c$ gegeben. Man suche alle Punkte P in der Ebene, welche die Eigenschaft haben, dass die Summe der Abstände $|PF_1|$ und $|PF_2|$ gleich $2a$ ist.



In der Figur liest man für die Koordinaten (x, y) des Punktes P folgendes ab:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

Quadrieren liefert

$$(x^2 + 2xc + c^2 + y^2) + 2\sqrt{(x^2 + 2cx + c^2 + y^2)(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)} + (x^2 - 2xc + c^2 + y^2) = 4a^2.$$

Die Terme $2xc$ und $-2xc$ heben sich auf. Kürzt man mit 2, isoliert die Wurzel auf der linken Seite und quadriert noch einmal, so ergibt sich

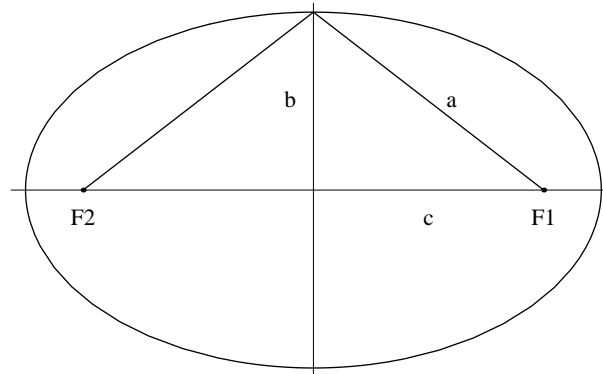
$$(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2 = 4a^4 - 4a^2(x^2 + y^2 + c^2) + (x^2 + y^2 + c^2)^2.$$

Der erste und der letzte Term dieser Gleichung heben sich auf; den Rest kann man mit 4 kürzen. Man erhält

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Schliesslich ergibt sich

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$



Diese Gleichung beschreibt eine **Ellipse** mit den Brennpunkten F_1 und F_2 und den Halbachsen a und b , wo b gegeben ist durch $b^2 = a^2 - c^2$.

In der Ebene E seien zwei Punkte F_1 und F_2 gegeben. Ihr Abstand sei $2c$. Ferner sei eine Zahl $a < c$ gegeben. Man suche alle Punkte P in der Ebene, welche die Eigenschaft haben, dass die Differenz der Abstände $|PF_1|$ und $|PF_2|$ gleich $2a$ ist.

Für die Koordinaten (x, y) des Punktes P gilt ähnlich wie oben:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a .$$

Die analoge Rechnung wie oben für die Ellipse liefert schliesslich die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1 .$$

Man beachte, dass unter den getroffenen Voraussetzungen $c^2 - a^2$ positiv ist. Setzen wir $b^2 = c^2 - a^2$, $b > 0$ so haben wir die Gleichung einer **Hyperbel** vor uns mit den Brennpunkten F_1 und F_2 und den "Halbachsen" a und b .

Ellipse und Hyperbel lassen sich auch durch Parameterdarstellungen beschreiben:

Die Kurve mit Parameter t gegeben durch

$$x(t) = a \cos t$$

$$y(t) = b \sin t$$

beschreibt eine **Ellipse** mit Halbachsen a und b . Die Brennpunkte liegen bei $F_1 = (-c, 0)$ und $F_2 = (c, 0)$, wo c durch $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ gegeben ist. In der Tat gilt, unabhängig vom Parameterwert, $x(t)^2/a^2 + y(t)^2/b^2 = 1$.

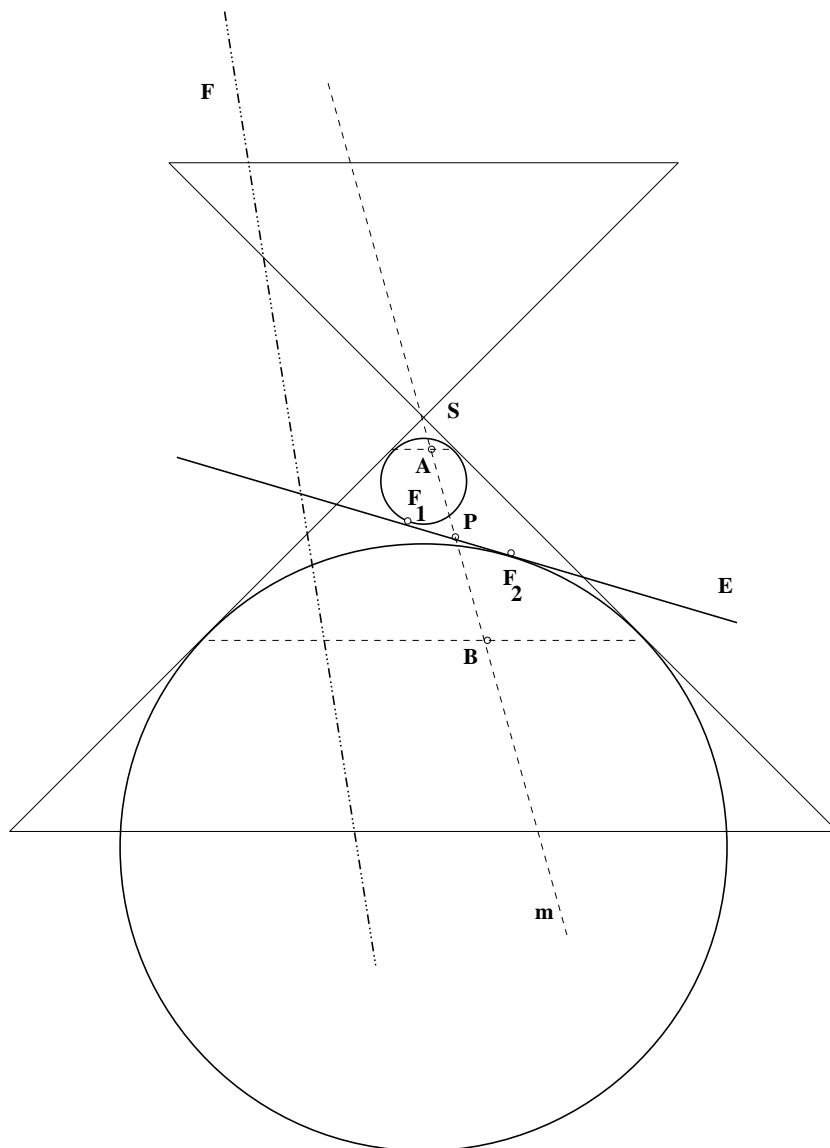
Die Kurve mit Parameter t gegeben durch

$$x(t) = a \cosh t$$

$$y(t) = b \sinh t$$

beschreibt eine **Hyperbel** mit "Halbachsen" a und b . Die Brennpunkte liegen bei $F_1 = (-c, 0)$ und $F_2 = (c, 0)$, wo c durch $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ gegeben ist. In der Tat gilt, unabhängig vom Parameterwert, $x(t)^2/a^2 - y(t)^2/b^2 = 1$.

Ellipse und Hyperbel lassen sich geometrisch als Schnitte eines Kreiskegels mit einer Ebene erhalten. Der Schnitt des Kegels mit der Ebene E (siehe Figur) erzeugt eine Ellipse, der Schnitt des Kegels mit der Ebene F (siehe Figur) erzeugt eine Hyperbel.



Die *Brennpunkte* der **Ellipse** erhält man, indem man dem Kegel Kugeln einbeschreibt, welche die Ebene E berühren (Dandelin'sche Kugeln): Die Berührungspunkte mit der Ebene sind gerade die beiden Brennpunkte F_1 und F_2 der Ellipse.

Der *Beweis*, dass die Schnittkurve der Ebene E mit dem Kegel eine Ellipse ist, lässt sich dann wie folgt führen. Man betrachte auf dem Kegel eine Mantellinie m . Diese schneidet die Schnittkurve mit der Ebene E im Punkte P . Von P legt man je zwei Tangenten an die beiden Kugeln: PF_1 und PA an die obere Kugel, PF_2 und PB an die untere Kugel. Die Punkte A und B liegen dabei auf den Berührungskreisen der Kugeln mit dem Kegel. Natürlich gilt dann $|PF_1| = |PA|$ und $|PF_2| = |PB|$ und man erhält

$$|PF_1| + |PF_2| = |PA| + |PB| = |AB| .$$

Die Länge $|AB|$ ist aber für jede Mantellinie auf dem Kegel und deshalb auch für jeden Punkt der Schnittkurve gleich. Daraus folgt, dass die Schnittkurve eine Ellipse ist mit den Brennpunkten F_1 und F_2 .

Der Beweis dafür, dass die Schnittkurve mit der Ebene F eine Hyperbel ist, wird analog geführt.