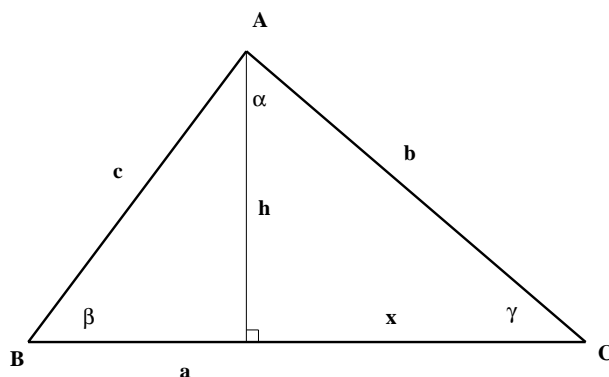


U. Stambach: Analysis I/II

... und das setzen wir als wohlbekannt voraus!

Die trigonometrischen Funktionen wurden ursprünglich am rechtwinkligen Dreieck definiert. So ist es keine Überraschung, dass sie für Berechnungen an rechtwinkligen Dreiecken dienlich sind. Die trigonometrischen Funktionen ermöglichen darüber hinaus aber auch die rechnerische Behandlung *beliebiger Dreiecke*. Für diesen Zweck sind die folgenden zwei leicht zu beweisenden Sätze nützliche Werkzeuge, der *Sinus-Satz* und der *Cosinus-Satz*.



Der Sinus-Satz In einem beliebigen Dreieck gilt

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c} .$$

Beweis In den beiden rechtwinkligen Teildreiecken, die man erhält, wenn man die Höhe h_a einzeichnet, gilt

$$h = c \sin \beta = b \sin \gamma .$$

Daraus folgt

$$\frac{\sin \gamma}{c} = \frac{\sin \beta}{b} .$$

Der Rest ergibt sich aus Symmetriegründen.

Der Cosinus-Satz In einem beliebigen Dreieck gilt

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma .$$

Beweis Im rechten der beiden rechtwinkligen Teildreiecke, die man erhält, wenn man die Höhe h_a einzeichnet, gilt $x = b \cos \gamma$. Man erhält dann mit dem Satz von Pythagoras im linken Dreieck

$$c^2 = h^2 + (a - x)^2 = b^2 - x^2 + a^2 - 2ax + x^2 .$$

Daraus ergibt sich

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma .$$