

U. Stambach: Analysis I/II

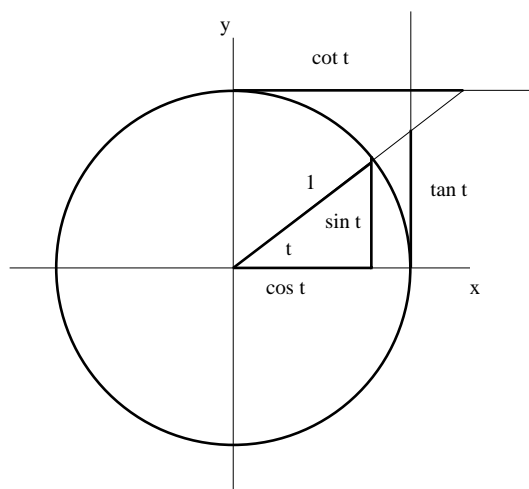
... und das setzen wir als wohlbekannt voraus!

Trigonometrische Funktionen

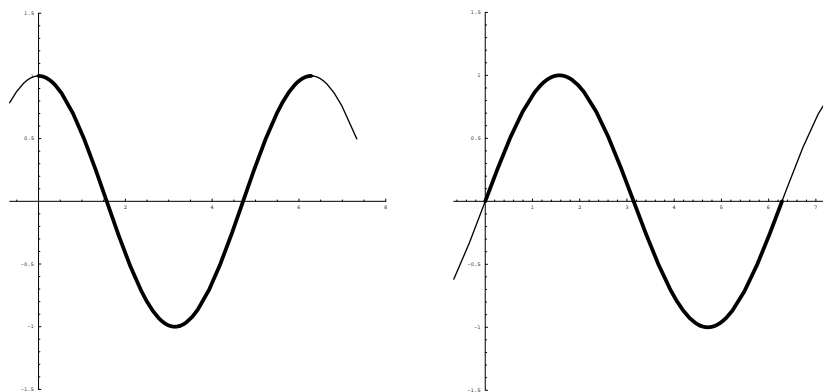
Vgl. Burg, Haf, Wille: *Höhere Mathematik für Ingenieure, Analysis*, Teubner Verlag; p. 203-212 oder Schirotzek/Scholz: *Starthilfe Mathematik*, Teubner Verlag; p. 39-45

Ursprünglich als Verhältniszahlen am rechtwinkligen Dreieck eingeführt, werden Sinus und Cosinus heutzutage als Funktionen angesehen, die auf der ganzen reellen Zahlgeraden definiert sind.

Wir betrachten den Einheitskreis in der (x, y) -Ebene. Ist P ein Punkt der Peripherie dieses Kreises, so beschreiben wir die Lage von P durch die von $(1, 0)$ aus gemessene (Kreis-)Bogenlänge t . Dabei misst man t im Gegenuhrzeigersinn positiv und im Uhrzeigersinn negativ. Die Grössen $\cos t$ und $\sin t$ sind dann wie folgt definiert: Es sei P der Punkt auf dem Einheitskreis, der zur Bogenlänge t gehört; dann ist $\cos t$ die x -Koordinate von P und $\sin t$ die y -Koordinate von P . Damit sind die Funktionen \cos und \sin für alle reellen t definiert. Offenbar ist der Wertebereich beider Funktionen $[-1, 1]$.



Da der ganze Umfang des Einheitskreises gerade 2π beträgt, gehört zu t und zu $t + 2\pi$ der gleiche Punkt P des Einheitskreises. Damit folgt $\cos(t + 2\pi) = \cos t$ und $\sin(t + 2\pi) = \sin t$; die beiden Funktionen \cos und \sin sind *periodisch* mit Periode 2π . Es genügt deshalb eine einzige Periode zu skizzieren: (Welches ist der Cosinus? Welches ist der Sinus?)

**Fragen:**

Welche Punkte des Einheitskreises gehören zu $t = \pi/2, \pi, 3\pi/2, -\pi/2, 7\pi$?

Was ist $\sin 0, \sin(\pi/2), \sin(-\pi/2), \sin \pi$?

Was ist $\cos 0, \cos(\pi/2), \cos(-\pi/2), \cos \pi$?

Man zeige, dass aus der Definition für \sin und \cos die Gleichungen

$$\sin(-t) = -\sin t, \cos(-t) = \cos t$$

folgen.

Man zeige, dass aus der Definition für \sin und \cos die Gleichungen

$$\sin(\pi/2 - t) = \cos t, \cos(\pi/2 - t) = \sin t$$

folgen.

Man zeige, dass aus der Definition für \sin und \cos die Gleichungen

$$\sin(t + \pi) = -\sin t, \cos(t + \pi) = -\cos t$$

folgen.

Liegt t zwischen 0 und $\pi/2$, so ist sowohl die x - wie auch die y -Koordinate des zu t gehörigen Punktes P positiv. Man zeige, dass in diesem Fall die oben gegebene Definition von $\sin t$ und $\cos t$ mit der ursprünglichen Definition am rechtwinkligen Dreieck übereinstimmt, wenn man t als Mass (*Bogenmass*) für den (Polar-)Winkel auffasst.

Neben den beiden trigonometrischen Funktionen \sin und \cos sind zwei weitere gebräuchlich, die sich daraus herleiten lassen, nämlich der Tangens (\tan) und der

Cotangens (\cot). Diese sind definiert durch

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}, \quad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

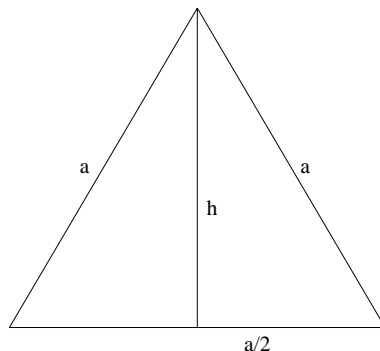
Sowohl $\tan t$ wie auch $\cot t$ lassen sich wie $\sin t$ und $\cos t$ als Koordinaten von Punkten deuten. Für $\tan t$ betrachte man die Tangente (daher der Name!) an den Einheitskreis im Punkte $(1, 0)$ und betrachte den Schnittpunkt Q mit dem über P hinaus verlängerten Fahrstrahl. Dann ist $\tan t$ die y -Koordinate von Q . Für $\cot t$ betrachte man die Tangente an den Einheitskreis im Punkte $(0, 1)$ und betrachte den Schnittpunkt R mit dem über P hinaus verlängerten Fahrstrahl. Dann ist $\cot t$ die x -Koordinate von R .

Bemerkung: Praktisch nur in der englischsprachigen Fachliteratur treten die zwei Winkelfunktionen Secans (\sec) und Cosecans (\csc) auf.

Für gewisse ausgezeichnete Winkel t lassen sich die Werte der Winkelfunktionen sofort angeben. Dazu gehören die Winkel $0, \pi/6 (= 30^\circ), \pi/4 (= 45^\circ), \pi/3 (= 60^\circ), \pi/2 (= 90^\circ)$. Man erhält diese Werte wie folgt:

Im gleichseitigen Dreieck mit Seite a erhält man für die Höhe h

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

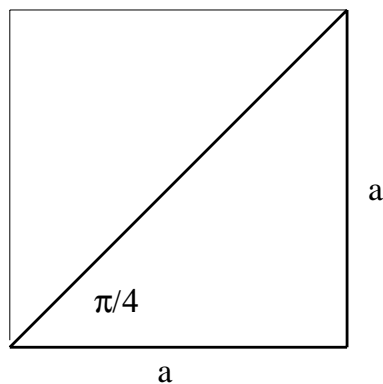


Für die Winkel $\pi/6$ und $\pi/3$ liest man dann am entstehenden rechtwinkligen Dreieck mit den Seiten $a/2$, h und a ab:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{6} &= \frac{1}{2}, \\ \cos \frac{\pi}{6} &= \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin \frac{\pi}{3} &= \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos \frac{\pi}{3} &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Im Quadrat mit Seitenlänge a erhält man für die Diagonale d

$$d = \sqrt{2}a .$$



Man liest dann am “halben” Quadrat ab:

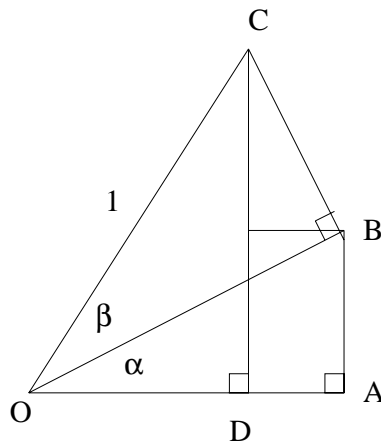
$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2} , \\ \cos \frac{\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2} . \end{aligned}$$

Fragen:

Man stelle in einer Tabelle die Werte der vier Winkelfunktionen \sin , \cos , \tan , \cot für die Winkel $0, \pi/6 (= 30^\circ), \pi/4 (= 45^\circ), \pi/3 (= 60^\circ), \pi/2 (= 90^\circ)$ zusammen.

Man skizziere die Graphen der vier Winkelfunktionen \sin , \cos , \tan , \cot im Intervall $[0, 2\pi]$, das einer Periode von \sin und \cos entspricht. Für welche Werte von t sind $\tan t$ ($\cot t$) nicht definiert? Wie erklärt sich, dass die Funktionen \tan und \cot periodisch sind mit Periode π (und nicht nur 2π)?

Für die Funktionen \sin und \cos gelten die sogenannten Summenformeln. Diese lassen sich an der folgenden Figur ablesen:



Es gilt nämlich $OD = \cos(\alpha + \beta)$, $DC = \sin(\alpha + \beta)$. Ferner gilt $OB = \cos \beta$ und $CB = \sin \beta$, woraus sich dann z.B. $AB = \sin \alpha \cdot \cos \beta$ ergibt, so dass folgt $DC = \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha$. Ähnlich lassen sich die übrigen Strecken berechnen. Die Details kann der Leser selbst nachvollziehen und so die folgenden Formeln bestätigen.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta .$$

Frage *Wie lauten die entsprechenden Formeln für den Tangens und den Cotangens?* (Beachte, dass sich diese direkt aus den Additionsformeln für den Sinus und den Cosinus herleiten lassen!)