

## U. Stambach: Analysis I/II

... und das setzen wir als wohlbekannt voraus!

### Potenzfunktionen

Vgl. *Schirotzek/Scholz: Starthilfe Mathematik, Teubner Verlag; p. 33-35*  
oder *Mathematiklehrbuch des Gymnasiums*

Wir betrachten hier zuerst für eine gegebene natürliche Zahl  $n$  die Funktion

$$f : x \rightarrow x^n$$

und zwar auf dem Definitionsbereich  $D(f) = [0, \infty)$ .

Ausser im Ausnahmefall  $n = 0$  ist die Funktion  $x \rightarrow x^n$  strikt monoton wachsend. Der Graph von  $x \rightarrow x^1$  ist die rechte Hälfte der ersten Winkelhalbierenden, der Graph von  $x \rightarrow x^2$  ist der rechte Ast der quadratischen Normparabel, der Graph von  $x \rightarrow x^3$  ist der rechte Ast der kubischen Normparabel, etc. Der Wertebereich der Funktion  $x \rightarrow x^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  ist das Intervall  $[0, \infty)$ .

Die Graphen von  $x \rightarrow x^n$  und  $x \rightarrow x^m$  für  $n < m$  schneiden sich in den Punkten  $(0, 0)$  und  $(1, 1)$ . Im Intervall  $(0, 1)$  verläuft der Graph von  $x \rightarrow x^m$  *unterhalb*, im Intervall  $(1, \infty)$  *oberhalb* des Graphen von  $x \rightarrow x^n$ .

Wie oben bereits festgestellt worden ist, ist die Potenzfunktionen zum Exponenten  $n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  strikt monoton wachsend, sie ist deshalb injektiv, und es existiert die dazu inverse Funktion. Man bezeichnet sie definitionsgemäss mit  $x \rightarrow x^{\frac{1}{n}}$ , und nennt  $x^{\frac{1}{n}}$  die  $n$ -te *Wurzel* von  $x$ . Der Definitionsbereich ist (wiederum) das Intervall  $[0, \infty)$ .

Da die Graphen einer Funktion  $f$  und der dazu inversen Funktion  $f^{-1}$  zur ersten Winkelhalbierenden spiegelbildlich sind, lassen sich die Graphen der *Wurzelfunktionen* ohne Schwierigkeiten zeichnen.

**Frage** Man skizziere die Graphen von  $x \rightarrow x^{\frac{1}{2}}$ ,  $x \rightarrow x^{\frac{1}{3}}$  und  $x \rightarrow x^{\frac{1}{5}}$ . Wo schneiden sich diese Graphen? Wo schneiden sich die Graphen von  $x \rightarrow x^3$  und  $x \rightarrow x^{\frac{1}{3}}$ ?

**Frage** Es sei  $n < m$ . In welchem Intervall verläuft der Graph von  $x \rightarrow x^{\frac{1}{m}}$  oberhalb, in welchem Intervall unterhalb des Graphen von  $x \rightarrow x^{\frac{1}{n}}$ ?

Für einen rationalen Exponenten  $m/n$  definiert man

$$x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m.$$

**Frage** Für die rationale Zahl  $10/3$  gilt  $3 < 10/3 < 4$ . Man überlege sich, was für Ungleichungen zwischen den Zahlen  $a^3$ ,  $a^{\frac{10}{3}}$  und  $a^4$  gelten? (Achtung: Es ist eine

*Fallunterscheidung  $a \in (0, 1)$  bzw.  $a \in (1, \infty)$  notwendig!) Ausgehend von diesem Resultat skizziere man die Graphen von  $x \rightarrow x^3$ ,  $x \rightarrow x^4$ ,  $x \rightarrow x^{\frac{10}{3}}$ ,  $x \rightarrow x^{\frac{1}{3}}$ ,  $x \rightarrow x^{\frac{1}{4}}$  und  $x \rightarrow x^{\frac{3}{10}}$ .*

**Frage** *Wie lassen sich diese Überlegungen auf beliebige rationale Exponenten übertragen? Man skizziere die Graphen der Funktionen  $x \rightarrow x^2$ ,  $x \rightarrow x^3$ ,  $x \rightarrow x^{\frac{1}{2}}$ ,  $x \rightarrow x^{\frac{1}{3}}$ ,  $x \rightarrow x^{\frac{2}{3}}$ ,  $x \rightarrow x^{\frac{3}{2}}$ ,  $x \rightarrow x^{\frac{4}{3}}$  und  $x \rightarrow x^{\frac{3}{4}}$ .*

*Bemerkung:* Es lassen sich auch Potenzen mit beliebigen reellen Exponenten  $\alpha$ , nicht nur rationalen, definieren. Man stellt zu diesem Zweck die reelle Zahl  $\alpha$  als Limes einer Folge von rationalen Zahlen  $a_1, a_2, a_3, \dots$  dar, und setzt

$$x^\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{a_n}.$$

Die oben gewonnenen Erkenntnisse über rationale Exponenten lassen sich ohne weiteres übertragen. Wir verzichten hier darauf, die Details darzustellen.

Wir gehen zurück zu ganzzahligen Exponenten und betrachten noch einmal die Funktion

$$x \rightarrow x^n$$

aber dieses Mal mit dem Definitionsbereich  $(-\infty, \infty)$ . Man stellt fest:

*Falls  $n$  gerade ist, ist der Graph symmetrisch zur  $y$ -Achse: die Funktion ist gerade. Falls  $n$  ungerade ist, ist der Graph symmetrisch zum Ursprung: die Funktion ist ungerade.*

Schliesslich bemerken wir, dass die zu einem *ungeraden* Exponenten gehörigen Potenzfunktion auf dem ganzen Definitionsbereich  $(-\infty, \infty)$  strikt monoton wachsend und damit injektiv ist. In diesem Fall lässt sich die inverse Funktion ebenfalls auf dem Intervall  $(-\infty, \infty)$  definieren. (Weshalb lässt sich das nur für *ungerade* Exponenten durchführen?) Man skizziere die Graphen der beiden auf ganz  $\mathbb{R}$  definierten Funktionen  $x \rightarrow x^3$  und  $x \rightarrow x^{\frac{1}{3}}$ .