

U. Stambach: Analysis I/II

... und das setzen wir als wohlbekannt voraus!

Im Kapitel Grundlagen stellen wir unter dem Titel ... und das setzen wir als wohlbekannt voraus! Dinge zusammen, die zum Gymnasialstoff gehören. Wer beim Durcharbeiten dieser Seiten irgendwelche Schwierigkeiten hat, ist gut beraten, den Stoff nachzuarbeiten. Wir verweisen wenn möglich auf die entsprechenden Abschnitte im Buch von Burg, Haf, Wille: Höhere Mathematik für Ingenieure, Band I Analysis, Teubner Verlag, oder geben eine andere Referenz an.

Analytische Beschreibung von Geraden in der Ebene.

Burg, Haf, Wille, Band I, Seiten 151-158.

Ist in der Ebene E ein kartesisches Koordinatensystem ausgezeichnet, so wird eine Gerade g durch eine *lineare* Gleichung in x und y beschrieben:

$$y = ax + b .$$

Die Grössen a und b sind durch g eindeutig bestimmt. Umgekehrt beschreibt jede derartige lineare Gleichung eine Gerade.

Zwei Fälle treten in natürlicher Weise auf:

Fall a: Kennt man zwei Punkte P_0 und P_1 der Geraden g , so ergeben sich die zugehörigen Grössen a und b , indem man benutzt, dass die Koordinaten der Punkte $P_0 = (x_0, y_0)$ und $P_1 = (x_1, y_1)$ die Gleichung $ax + b$ erfüllen. Dies führt auf zwei Gleichungen mit den zwei Unbekannten a und b . *Einfacher* ist es allerdings, die Gleichung direkt hinzuschreiben:

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) .$$

Diese Gleichung drückt aus, dass *erstens* der Punkt (x_0, y_0) auf der Geraden liegt und *zweitens* die zu den Punkten $P = (x, y)$ (allgemeiner Punkt der Geraden) und $P_0 = (x_0, y_0)$ gehörige Steigung übereinstimmt mit der Steigung, die durch die Punkte $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_0 = (x_0, y_0)$ vorgegeben ist.

Fall b: Ist die Gerade durch den Punkt $P_0 = (x_0, y_0)$ und die Steigung m gegeben, so ist $a = m$. Die noch fehlende Grösse b lässt sich erhalten, indem man benutzt, dass die Koordinaten des Punktes $P_0 = (x_0, y_0)$ die Gleichung $y = mx + b$ erfüllen. *Einfacher* ist es, die Gleichung direkt hinzuschreiben:

$$y - y_0 = m(x - x_0) .$$

Sie drückt – ähnlich wie oben – aus, dass *erstens* $P_0 = (x_0, y_0)$ auf der Geraden liegt und *zweitens* die zu den Punkten $P = (x, y)$ (allgemeiner Punkt der Geraden) und $P_0 = (x_0, y_0)$ gehörige Steigung m ist.

Man zeige, dass sowohl im Falle (a) wie auch im Falle (b) die beiden skizzierten Wege zum gleichen Resultat führen.

Bemerkung: Man beachte, dass die hier besprochene analytische Beschreibung die Parallelen zur y -Achse *nicht* umfasst. Treten solche Geraden auf, so kann man sie durch Gleichungen der Form $x = c$ beschreiben.

Fragen:

Woran erkennt man an der Geradengleichung, ob die Gerade fällt oder steigt oder horizontal ist?

Die Gerade g sei parallel zur x -Achse und verlaufe durch den Punkt $(1, 3)$. Wie lautet ihre Gleichung?

Wie lautet die Gleichung der ersten Winkelhalbierenden, also der Geraden durch die Punkte $(0, 0)$ und $(1, 1)$.

Wie lautet die Gleichung der zweiten Winkelhalbierenden, also der Geraden durch die Punkte $(0, 0)$ und $(-1, 1)$.

Was ist die geometrische Bedeutung von b in der linearen Gleichung $y = ax + b$?

Man gebe die Gleichung der Geraden an, die durch die Punkte $(2, -3)$ und $(-1, 1)$ verläuft?

Soviel zu Geraden in der Ebene. Im dreidimensionalen Raum ist die Situation etwas anders. Geraden im dreidimensionalen Raum entsprechen nicht einfach linearen Gleichungen in x , y und z . (Die lineare Gleichung $ax + by + cz = d$ beschreibt bekanntlich ein anderes geometrisches Gebilde! Was für eines?) Um Geraden darzustellen, müssen andere Mittel verwendet werden. Eine Möglichkeit besteht darin, die Gerade durch eine *Parameterdarstellung* zu beschreiben (vgl. Skript Vektoralgebra):

Die Gerade g , die durch den Punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ geht und die Richtung $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ besitzt, wird durch die Parameterdarstellung

$$\vec{OP} = \vec{OP}_0 + t\vec{a}$$

beschrieben. Der Parameter t variiert von $-\infty$ bis $+\infty$. Jeder Punkt der Geraden g tritt bei dieser Beschreibung für genau einen Wert des Parameters t auf.