

ANALYSIS I

Aufgaben zur Vektoralgebra

1. Welche Vektoren \vec{d} können als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1 = (1, 0, 0)$ und $\vec{a}_2 = (2, 3, 0)$ dargestellt werden, welche nicht?
2. Berechne den von den beiden Vektoren $\vec{a} = (-2, 2, -1)$ und $\vec{b} = (0, -3, 0)$ eingeschlossenen Winkel γ .
3. Bestimme den Einheitsvektor \vec{e} in Richtung der Projektion von $\vec{a} = (7, -3, 9)$ auf $\vec{b} = (2, 1, -2)$.
4. Verifiziere, dass die Vektoren $\vec{a} = (2, 1, -2)$ und $\vec{b} = (1, 2, 2)$ senkrecht aufeinander stehen.
5. Bestimme einen Vektor $\vec{c} \neq (0, 0, 0)$, der senkrecht auf den Vektoren $\vec{a} = (3, -4, 5)$ und $\vec{b} = (3, 2, -7)$ steht.
6. Berechne den Flächeninhalt des von den Vektoren $\vec{a} = (4, -1, 5)$ und $\vec{b} = (2, 3, -2)$ aufgespannten Dreiecks.
7. Die drei Punkte $A(1, 3, 1)$, $B(-2, 1, 1)$ und $C(1, -1, 0)$ sind gegeben. Bestimme
 - a) eine Parameterdarstellung
 - b) eine Gleichung
 - c) einen Normaleneinheitsvektorder Ebene, die durch diese Punkte definiert wird.
8.
 - a) Bestimme einen Normalenvektor \vec{n} und den Abstand d vom Ursprung der Ebene $E : x + 2y - 2z = 12$.
 - b) Bestimme den Abstand d' des Punktes $P(2, 3, -4)$ von E .
 - c) Bestimme eine Gleichung der Ebene F mit der Parameterdarstellung $(x, y, z) = (3, 3, 3) + \lambda(1, 1, 0) + \mu(-1, 0, 1)$.
 - d) Bestimme die Schnittgerade s von E und F .
 - e) Durchstosse die Gerade $g : (x, y, z) = (2, 1, -1) + \nu(3, 1, -1)$ mit E .
 - f) Bestimme den Schnittwinkel α von E und F .

./.

9. Zerlege den Vektor $\vec{x} = (2, -3, 1)$ in eine Komponente parallel zu $\vec{a} = (1, 0, 2)$ und in eine Komponente senkrecht zu $\vec{b} = (-1, 1, 1)$.
10. Eine Kugel mit dem Mittelpunkt $M(3, 1, 2)$ hat den Radius $r = 5$. Durch den Punkt $P(2, -1, 4)$ im Innern der Kugel ist die Ebene E so zu legen, dass sie aus der Kugel den kleinstmöglichen Kreis ausschneidet. Bestimme die Gleichung von E und den Radius des Kreises.
11. Die Gerade durch die Punkte $A(2, -1, 3)$ und $B(4, 0, 2)$ wirft auf die Ebene $E : 3x - 2y + z = 10$ einen Schatten, wenn sie von parallel einfallendem Licht mit Richtung $\vec{d} = (1, 1, 1)$ beleuchtet wird. Bestimme diesen Schatten.
12. Welche Parallele zur x -Achse schneidet die Geraden

$$g : (x, y, z) = (3, -4, 2) + \lambda(-2, 3, 0) \quad \text{und} \\ h : (x, y, z) = (2, 13, 6) + \mu(-1, 2, 1) \quad ?$$

13. a) Für welchen Wert von p haben die Ebenen $E : x + y - 7 = 0$, $F : x - y - z - 8 = 0$ und $G : px + y - 2z - 9 = 0$ keinen gemeinsamen Schnittpunkt?
 b) Für welche Werte von p und q haben die Ebenen $E : x - 2y - 4 = 0$, $F : x - y + z + 5 = 0$ und $G : px + y + 3z + q = 0$ eine gemeinsame Schnittgerade?
14. Fünf Punkte $A(4, 1, 2)$, $B(2, 6, 3)$, $C(-3, 2, 4)$, $P(0, 0, 5)$ und $Q(3, 9, -1)$ seien gegeben. Man denke sich das Dreieck ABC als undurchsichtige Fläche und begründe rechnerisch, ob P von Q aus sichtbar ist oder nicht.
15. Bestimme die Gleichung einer Kugel mit Radius 3, die durch die Punkte $A(0, 0, 2)$ und $B(2, 0, -2)$ geht, wenn der Kugelmittelpunkt auf der Ebene $E : 2x - y - 5z = 0$ liegt.
16. Die Punkte $A(9, -8, 8)$ und $C(-3, 4, 2)$ bestimmen die Diagonale eines Quadrates $ABCD$, das in der Ebene $ax + by - 2z + 6 = 0$ liegt. Der Punkt $S(9, 1, 11)$ ist die Spitze einer Pyramide über der Grundfläche $ABCD$. Wie gross ist das Volumen der Pyramide?
17. Die folgenden Sätze sind vektoriell zu beweisen:
 - a) Die Verbindungsstrecken aufeinanderfolgender Seitenmitten eines beliebigen Vierecks bilden ein Parallelogramm.
 - b) Sind in einem Tetraeder die Kanten zweier Paare von Gegenkanten zueinander orthogonal, so sind es auch die Kanten des dritten Paares.