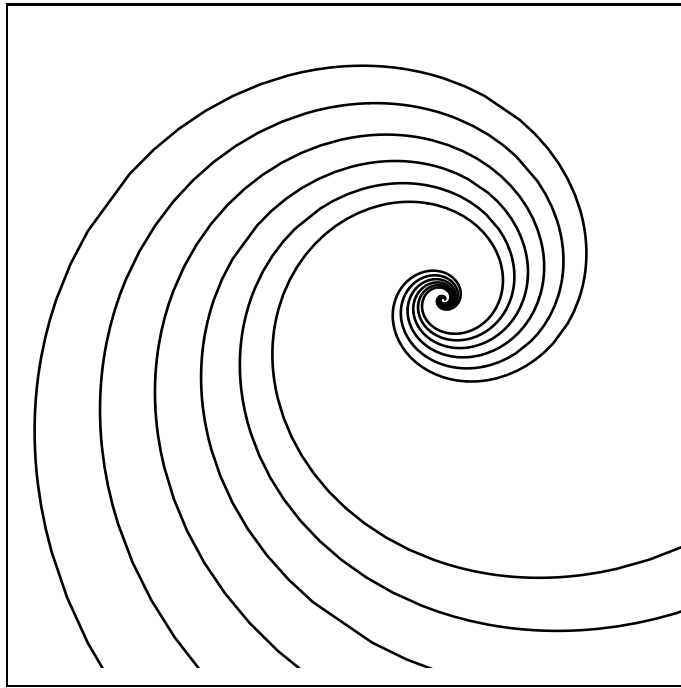


Vektoralgebra

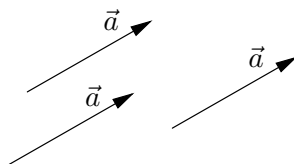


*Wie nutzlos ist das Lernen, wenn es nicht
mit Verständnis gepaart ist.*

Menandros (342 - 291 v. Chr.)

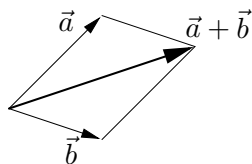
1 Addition von Vektoren und Multiplikation von Vektoren mit einer reellen Zahl

Ein **Vektor** ist eine gerichtete Strecke im Raum, wobei zwischen gerichteten Strecken, welche durch Parallelverschiebung auseinander hervorgehen, nicht unterschieden wird. – Ein Vektor \vec{a} ist also durch Länge (Betrag) $|\vec{a}|$ und Richtung bestimmt.

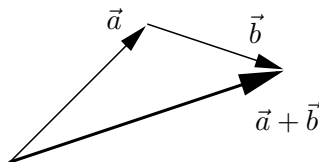


Wir definieren in der Folge eine *Addition* von Vektoren und eine *Multiplikation* von Vektoren mit einer reellen Zahl.

Die **Summe** $\vec{a} + \vec{b}$ zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b} ist die gerichtete Diagonale des von \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Parallelogrammes.



Eine Variante dieser Definition ist wie folgt: Um den Vektor $\vec{a} + \vec{b}$ zu erhalten, setze man den Anfangspunkt von \vec{b} an den Endpunkt von \vec{a} . Der Vektor $\vec{a} + \vec{b}$ ist dann durch die gerichtete Strecke gegeben, die vom Anfangspunkt von \vec{a} zum Endpunkt von \vec{b} zeigt.



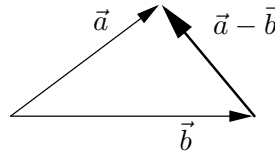
Die Addition genügt dem Kommutativgesetz

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

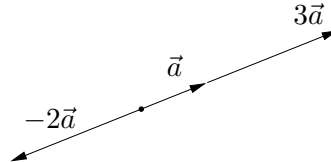
und dem Assoziativgesetz

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) .$$

Es ist angezeigt, neben den ‘normalen’ Vektoren auch den *Nullvektor* $\vec{0}$ zu betrachten. Der Betrag des Nullvektors ist 0, eine Richtung kommt ihm nicht zu. Zur Addition von Vektoren gibt es auch eine umgekehrte Operation, die Subtraktion. Der Vektor $\vec{a} - \vec{b}$ ist der Vektor, welcher zu \vec{b} addiert, \vec{a} ergibt. Bringt man die Vektoren \vec{a} und \vec{b} im gleichen Punkt an, so ist die Differenz $\vec{a} - \vec{b}$ durch die gerichtete Strecke gegeben, die vom Endpunkt von \vec{b} zum Endpunkt von \vec{a} führt.



Das **Produkt** $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$ einer reellen Zahl λ mit einem Vektor \vec{a} ist der Vektor \vec{b} , der den $|\lambda|$ -fachen Betrag aufweist und dessen Richtung wie folgt bestimmt ist: für $\lambda \geq 0$ hat \vec{b} die gleiche Richtung wie \vec{a} und für $\lambda \leq 0$ hat \vec{b} die zu \vec{a} entgegengesetzte Richtung.

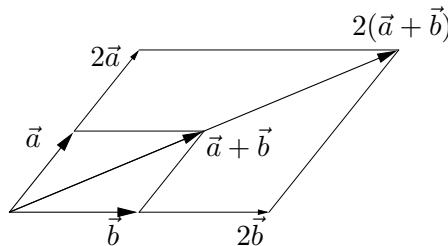


Die Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl ist mit den Operationen innerhalb der reellen Zahlen (Addition, Multiplikation) verträglich. Es gelten die Rechenregeln

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} &= \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}, \\(\lambda \mu) \cdot \vec{a} &= \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}).\end{aligned}$$

Ferner ist die Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl auch mit der Addition von Vektoren verträglich:

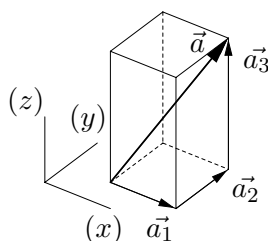
$$\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}.$$



Führt man im Raum ein kartesisches Koordinatensystem ein, so lassen sich Vektoren durch drei Komponenten beschreiben. Ist der Vektor \vec{a} durch die Strecke mit Anfangspunkt $P = (x_1, x_2, x_3)$ und Endpunkt $Q = (y_1, y_2, y_3)$ gegeben, so wird $\vec{a} = \vec{PQ}$ durch das Tripel

$$(y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3)$$

beschrieben. Man beachte, dass gerichtete Strecken, die durch Parallelverschiebung auseinander hervorgehen und die deshalb auch den gleichen Vektor beschreiben, zu den gleichen Komponenten führen.

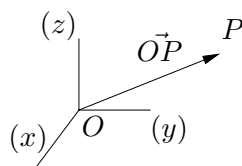


Wie man sich leicht überlegt, stellen sich in Komponentenschreibweise für die reelle Zahl λ und die Vektoren $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ und $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ die Addition und die Multiplikation mit einer reellen Zahl in der folgenden Form dar

$$\begin{aligned}\lambda \cdot \vec{a} &= (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3) , \\ \vec{a} + \vec{b} &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) .\end{aligned}$$

In dieser algebraischen Form sind die oben genannten Rechenregeln sehr einfach zu verifizieren.

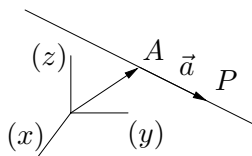
Beispiel Punkte im dreidimensionalen Raum, in dem ein kartesisches Koordinatensystem ausgezeichnet ist, werden durch ihre drei Koordinaten beschrieben. Es ist oft vorteilhaft, diese drei Koordinaten als Komponenten des *Ortsvektors* \vec{OP} von P zu betrachten. Spricht man von einem Ortsvektor, so meint man implizit, dass der Vektor im Ursprung O des Koordinatensystems angebracht ist.



Ein **Beispiel**, wo die Vorteile dieser Auffassung klar werden, ist die Parameterdarstellung einer Gerade im Raum. Es sei ein Punkt A im dreidimensionalen Raum gegeben und eine Richtung, die durch den Vektor \vec{a} festgelegt wird. Gesucht ist eine Beschreibung der (Punkte der) Geraden g , die durch A geht und die Richtung \vec{a} hat. Es ist mit der neuen Auffassung sehr einfach, den Ortsvektor eines Punktes P der Geraden zu beschreiben: Der Ortsvektor \vec{OP} ist eine Summe des Vektors \vec{OA} und eines reellen Vielfachen des Vektors \vec{a} . Es gilt also

$$\vec{OP} = \vec{OA} + t\vec{a} ,$$

wo t eine durch P eindeutig bestimmte reelle Zahl bezeichnet. Wenn t alle reellen Zahlen durchläuft, so durchläuft P alle Punkte der Geraden g .

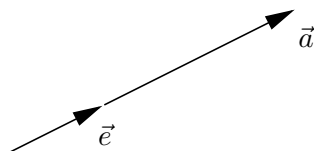


Beispiel Ähnliches geschieht bei der Parameterdarstellung einer Ebene im Raum. Es sei ein Punkt A im Raum gegeben und zwei (verschiedene) Richtungen, festgelegt durch die Vektoren \vec{a} und \vec{b} . Gesucht ist eine Beschreibung der (Punkte der) Ebene E , die durch den Punkt A geht und die zu \vec{a} und \vec{b} parallel ist. Ähnlich wie oben bei der Geraden ist es leicht, den Ortsvektor eines Punktes P der Ebene zu beschreiben: Der Ortsvektor \vec{OP} ist die Summe des Vektors \vec{OA} und einer reellen Linearkombination von \vec{a} und \vec{b} . Es gilt also

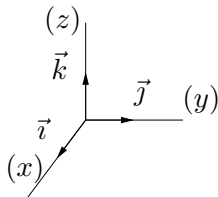
$$\vec{OP} = \vec{OA} + t\vec{a} + s\vec{b},$$

wo t und s zwei durch P eindeutig bestimmte reelle Zahlen bezeichnen. Wenn t und s alle Paare reeller Zahlen durchläuft, so durchläuft P alle Punkte der Ebene E .

Beispiel Ein *Einheitsvektor* ist ein Vektor der Länge 1. Ist \vec{a} , $\vec{a} \neq \vec{0}$ ein beliebiger Vektor, so ist $\vec{e} = \vec{a}/|\vec{a}|$ ein Einheitsvektor in der Richtung von \vec{a} .



Beispiel Ein kartesisches Koordinatensystem wird durch den Ursprung und die Einheitspunkte auf den drei Koordinatenachsen bestimmt. Die Ortsvektoren dieser drei Einheitspunkte sind die *Grundvektoren* des Koordinatensystems $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Man beachte, dass sich der Vektor $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ in eindeutiger Weise als Linearkombination $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ schreiben lässt.

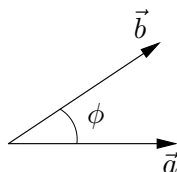


2 Skalarprodukt

Wir definieren als nächstes das sogenannte **Skalarprodukt**. Es ordnet dem Paar von Vektoren \vec{a} und \vec{b} eine reelle Zahl $\vec{a} \cdot \vec{b}$ zu, nämlich

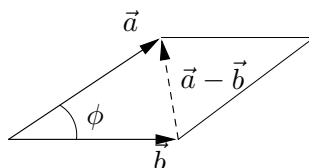
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \phi,$$

wobei ϕ den Winkel zwischen den Richtungen von \vec{a} und \vec{b} bezeichnet.



Algebraisch, d.h. durch Komponenten drückt sich das Skalarprodukt auf sehr einfache Art und Weise aus. Für $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ und $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ gilt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 .$$



Beweis Nach dem Cosinus-Satz der Trigonometrie gilt

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos \phi .$$

Damit erhält man in Komponenten

$$(a_1^2 + b_1^2 - 2a_1 b_1) + (a_2^2 + b_2^2 - 2a_2 b_2) + (a_3^2 + b_3^2 - 2a_3 b_3) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos \phi ,$$

woraus die behauptete Gleichung sofort folgt.

Es ergibt sich aus der algebraischen Form des Skalarproduktes, dass die folgenden Rechenregeln gelten:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{b} \cdot \vec{a} , \\ (\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} &= \lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\lambda \cdot \vec{b}) , \\ \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} . \end{aligned}$$

Man beachte, dass für das Skalarprodukt kein Assoziativgesetz gilt.

Mit Hilfe des Skalarproduktes lassen sich in der Vektoralgebra geometrische Begriffe wie Länge von Vektoren und Winkel zwischen Richtungen, so auch das Senkrechtstehen, rein algebraisch-rechnerisch beherrschen. Dazu einige Beispiele.

Beispiel Die *Länge* des Vektors \vec{a} ist gegeben durch

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} .$$

Beispiel Der *Winkel* ϕ zwischen den Vektoren \vec{a} und \vec{b} lässt sich mit Hilfe des Skalarproduktes bestimmen:

$$\cos \phi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} .$$

Beispiel Zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} , $\vec{a} \neq \vec{0} \neq \vec{b}$, stehen genau dann *senkrecht*, wenn ihr Skalarprodukt verschwindet, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Beispiel Die Ebene E sei gegeben durch den Punkt $A = (x_0, y_0, z_0)$ und den Normalenvektor $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$, $\vec{n} \neq \vec{0}$. Dann werden die Punkte $P = (x, y, z)$ der Ebene E charakterisiert durch die Bedingung

$$\vec{AP} \cdot \vec{n} = 0 .$$

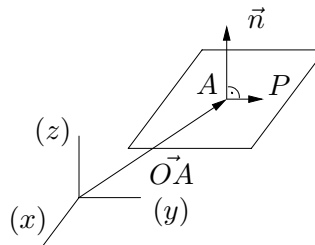
In Komponenten ausgedrückt liefert dies die *Gleichung* der Ebene E :

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0 .$$

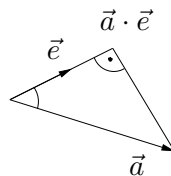
Insbesondere lässt sich jede Ebene in der Form

$$ax + by + cz = d$$

beschreiben. Dabei ist das Tripel (a, b, c) ein zur Ebene senkrecht stehender Vektor.



Beispiel Die *Projektion* eines Vektors \vec{a} auf die durch den *Einheitsvektor* \vec{e} gegebene Richtung ist $\vec{a} \cdot \vec{e}$.



3 Vektorprodukt

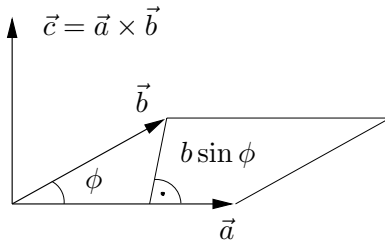
Neben dem Skalarprodukt von zwei Vektoren – das Resultat ist ein Skalar – gibt es auch ein *Vektorprodukt* – das Resultat ist ein Vektor.

Das **Vektorprodukt** $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ der beiden Vektoren \vec{a} und \vec{b} ist wie folgt bestimmt:

- Der Betrag von \vec{c} ist gegeben durch $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\phi$, wobei ϕ den Winkel zwischen \vec{a} und \vec{b} bezeichnet.

- Der Vektor \vec{c} ist senkrecht zu \vec{a} und zu \vec{b} .
- Die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

Der Betrag von $\vec{a} \times \vec{b}$ entspricht dem Flächeninhalt des von \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Parallelogrammes.



Wie das Skalarprodukt besitzt das Vektorprodukt eine einfache Beschreibung in Komponenten: Für $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ und $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ gilt

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1) .$$

Beweis Mit Ausnahme der dritten sind die definierenden Eigenschaften des Vektorproduktes für den in seinen drei Komponenten gegebenen Vektor einfach zu verifizieren:

Wie man mit dem Skalarprodukt nachprüft, steht der Vektor $(a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$ senkrecht auf $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ und $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

Für das Quadrat des Flächeninhaltes F des von \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Parallelogrammes gilt

$$\begin{aligned} F^2 &= (|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \phi)^2 \\ &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2 \phi) \\ &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \\ &= |\vec{a} \times \vec{b}|^2 . \end{aligned}$$

Die dritte Eigenschaft ist schwieriger nachzuweisen, und wir geben dafür keinen vollständigen Beweis. Immerhin können wir feststellen, dass für die Basisvektoren \vec{i}, \vec{j} und \vec{k} die Formel in der Tat richtig ist. Der Beweis lässt sich dann mit Hilfe einer Stetigkeitsüberlegung vervollständigen.

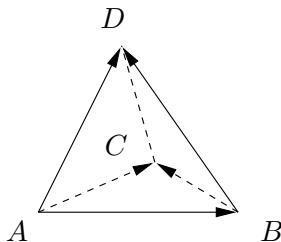
Es gelten für das Vektorprodukt die folgenden Rechenregeln; sie sind am einfachsten in der algebraischen Form nachzuprüfen:

$$\begin{aligned} \vec{b} \times \vec{a} &= -\vec{a} \times \vec{b} , \\ \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} , \\ (\lambda \cdot \vec{a}) \times \vec{b} &= \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\lambda \cdot \vec{b}) . \end{aligned}$$

Man beachte, dass für das Vektorprodukt kein Assoziativgesetz gilt.

Beispiel Die Achse einer Rotationsbewegung sei durch den Punkt A und den Einheitsvektor \vec{e} gegeben, die Winkelgeschwindigkeit durch den zu \vec{e} parallelen Vektor $\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{e}$. Ein Punkt P , der die Rotationsbewegung mitmacht, hat dann die Geschwindigkeit $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{AP}$.

Beispiel Ein Tetraeder mit den Eckpunkten A, B, C, D stehe unter allseitig gleichem Druck p . Man zeige, dass die resultierend Auftriebskraft trivial ist.



Die auf die Seitenfläche ABC wirkende Kraft \vec{K}_{ABC} ist proportional zum Flächeninhalt des Dreiecks ABC (Proportionalitätsfaktor p) und senkrecht nach innen gerichtet. Sie lässt sich mit Hilfe des Vektorproduktes wie folgt beschreiben:

$$\vec{K}_{ABC} = \frac{p}{2}(\vec{AB} \times \vec{AC}) .$$

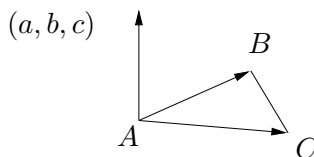
Analog ergibt sich

$$\begin{aligned} \vec{K}_{ACD} &= \frac{p}{2}(\vec{AC} \times \vec{AD}) , \\ \vec{K}_{ABD} &= -\frac{p}{2}(\vec{AB} \times \vec{AD}) , \\ \vec{K}_{BCD} &= -\frac{p}{2}(\vec{BC} \times \vec{BD}) . \end{aligned}$$

Es gilt nun $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$ und $\vec{BD} = \vec{AD} - \vec{AB}$. Damit folgt die Behauptung mit Hilfe der Rechenregeln.

Beispiel Es sei die Ebene E durch die drei Punkte A, B, C gegeben. Man bestimme die Gleichung der Ebene.

Die Gleichung hat die Form $ax + by + cz = d$. Es sind also die vier Koeffizienten a, b, c, d zu bestimmen. Wie wir wissen, ist der Vektor (a, b, c) ein zur Ebene senkrecht stehender Vektor. Ein solcher Vektor ist $\vec{AB} \times \vec{AC}$. Die noch fehlende Grösse d lässt sich dadurch bestimmen, dass die Koordinaten von A (oder B oder C) die Ebenengleichung erfüllen müssen.

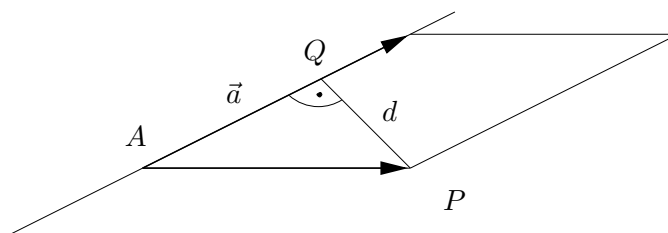


Beispiel Die Gerade g sei gegeben durch den Punkt A und die Richtung \vec{a} . Man bestimme den Abstand des Punktes P von der Geraden g .

Der Abstand d des Punktes P von der Geraden g lässt sich als Höhe des Parallelogrammes interpretieren, das A als Eckpunkt besitzt und das von den Vektoren \vec{a} (als Grundlinie) und dem Vektor \vec{AP} aufgespannt wird. Die Fläche dieses Parallelogrammes lässt sich dann einerseits berechnen als $d \cdot |\vec{a}|$ und andererseits als $|\vec{a} \times \vec{AP}|$. Der Abstand d ist somit durch

$$d = \frac{|\vec{a} \times \vec{AP}|}{|\vec{a}|}$$

gegeben.



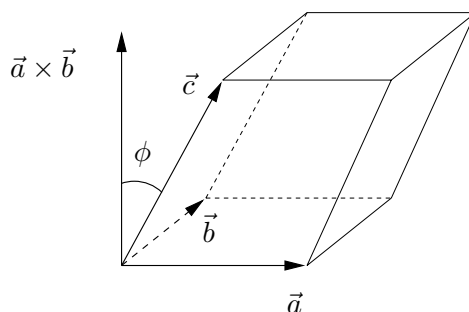
4 Das gemischte Produkt

Neben dem Skalarprodukt und dem Vektorprodukt betrachtet man in der Vektoralgebra auch eine Operation, an der *drei* Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ beteiligt sind, nämlich das **gemischte Produkt** $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Es ist definiert durch

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Werden die drei Vektoren in einem Punkt angebracht, so spannen sie im dreidimensionalen Raum ein sogenanntes Parallelepiped auf. (Auf den Fall, wo die Vektoren in einer Ebene liegen, kommen wir später zurück.) Wir betrachten das von den Vektoren \vec{a} und \vec{b} aufgespannte Parallelogramm als Grundfläche des Parallelepipeds. Im gemischten Produkt hat man

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot (|\vec{c}| \cdot \cos \phi).$$



Dabei ist $|\vec{a} \times \vec{b}|$ der Flächeninhalt der Grundfläche, und ϕ ist der Winkel zwischen $\vec{a} \times \vec{b}$ und \vec{c} , also zwischen der Normalenrichtung zur Grundfläche und \vec{c} . Ist $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ein *Rechtssystem*, so ist der Winkel ϕ spitz, und $|\vec{c}| \cdot \cos \phi$ ist die *Höhe* des Parallelepipeds. In diesem Fall ist also $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ das Volumen V des Parallelepipeds. Ist $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ein *Linkssystem*, so ist der Winkel ϕ stumpf, und $|\vec{c}| \cdot \cos \phi$ ist das Negative der Höhe des Parallelepipeds. In diesem Fall ist $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ das negative Volumen $-V$ des Parallelepipeds.

Im Ausnahmefall, wo die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ in einer Ebene liegen, erhält man $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$. Umgekehrt folgt offenbar aus $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$, dass die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ in einer Ebene liegen.

Aus der eben angestellten Überlegung ergibt sich ferner

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) .$$

Um dies einzusehen, geht man beim Parallelepiped, das von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannt wird, von jeweils anderen (bzw. anders orientierten) Grundflächen aus.

Beispiel Gibt man sich die Vektoren durch ihre Komponenten vor, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$, und drückt man das gemischte Produkt in diesen Komponenten aus, so folgt

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 .$$

Beispiel Die Gerade g sei gegeben durch den Punkt A und die Richtung \vec{a} und die Gerade h durch den Punkt B und die Richtung \vec{b} . Man bestimme den Abstand der beiden (im allgemeinen) windschiefen Geraden.

Der Abstand d der beiden Geraden kann interpretiert werden als Höhe des Parallelepipeds, das von \vec{a}, \vec{b} und $\vec{AB} = \vec{c}$ aufgespannt wird und das von \vec{a} und \vec{b} aufgespannte Parallelogramm als Grundfläche hat. Damit gilt $d = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|/|\vec{a} \times \vec{b}|$.

