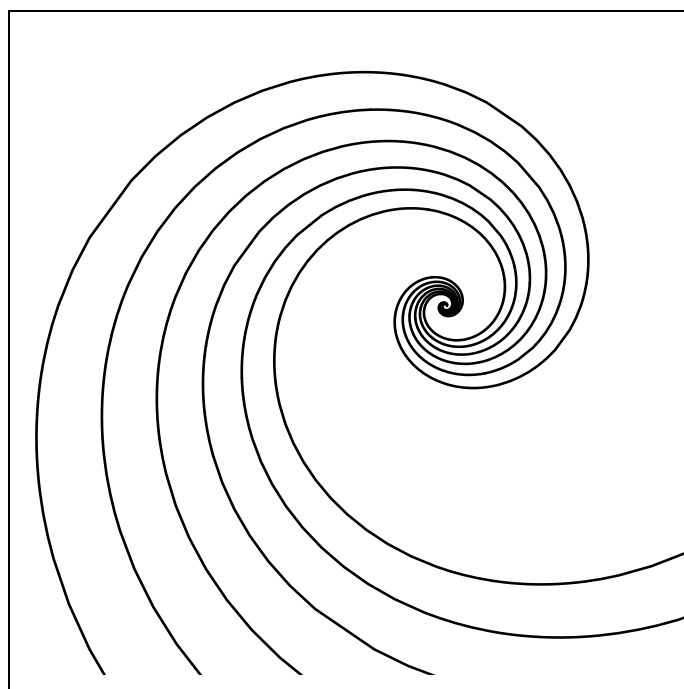


# Koordinatensysteme



*Auf die Plätze, fertig, los!*

Mögliche Aussage des virtuellen Rektors der ETH zu Beginn des Studienjahres.

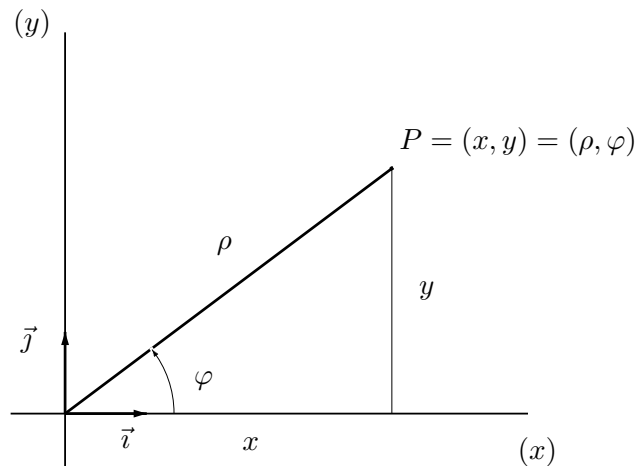


In diesem Nullkapitel unserer Vorlesung wollen wir eine Übersicht über einige viel gebrauchte Koordinatensysteme geben.

## 1 Koordinatensysteme in der Ebene

Wohlbekannt ist das *Kartesische Koordinatensystem*: Es wird ein Punkt  $O$  gewählt, sowie zwei senkrecht zueinander stehende Einheitsvektoren  $\vec{i}$  und  $\vec{j}$ . Dabei nehmen wir zwingend an, dass  $\vec{j}$  aus  $\vec{i}$  durch Drehung um  $\pi/2$  im *Gegenuhrzeigersinn* entsteht. Wir nennen die (Zahl-)Gerade durch  $O$  in Richtung  $\vec{i}$  die  $x$ -Achse und die (Zahl-)Gerade durch  $O$  in Richtung  $\vec{j}$  die  $y$ -Achse. Dann wird jeder Punkt  $P$  der Ebene durch ein geordnetes Zahlenpaar  $(x, y)$  beschrieben: Die Zahl  $x$  entspricht der Projektion längs  $\vec{j}$  von  $P$  auf die  $x$ -Achse und die Zahl  $y$  der Projektion längs  $\vec{i}$  von  $P$  auf die  $y$ -Achse. Die Zahlen  $x, y$  heißen die (*Kartesischen*) *Koordinaten* von  $P$  (bezüglich des gewählten Koordinatensystems). Das Zahlenpaar  $(x, y)$  beschreibt die Lage des Punktes  $P$  in der Ebene. Umgekehrt entspricht jedem geordneten Zahlenpaar  $(x, y)$  offensichtlich ein Punkt  $P$  in der Ebene. Wir nennen die Ebene versehen mit einem festen  $(x, y)$ -Koordinatensystem auch etwa die  $(x, y)$ -Ebene.

Der Punkt  $P$  lässt sich auch beschreiben, indem man seinen Abstand  $\rho$  von  $O$  und den Winkel  $\varphi$  angibt, den man zwischen der Richtung von  $\vec{i}$  und der Richtung  $\vec{OP}$  im Gegenuhrzeigersinn misst. (Offensichtlich ist  $\varphi$  durch  $P$  nur bis auf Vielfache von  $2\pi$  bestimmt!) Man nennt  $(\rho, \varphi)$  die *Polarkoordinaten* von  $P$  (bezüglich des gewählten Koordinatensystems).



Will man vom Kartesischen Koordinatensystem zum Polarkoordinatensystem wechseln, oder umgekehrt, so hat man folgende einfachen Formeln:

$$x = \rho \cdot \cos \varphi$$

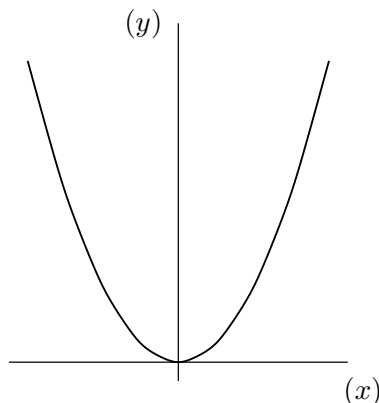
$$y = \rho \cdot \sin \varphi$$

und

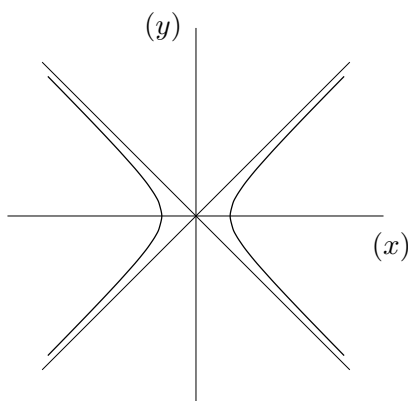
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \varphi = y/x$$

**Beispiel** Es sei eine Funktion  $f : x \rightarrow f(x)$  gegeben. Dann gehört zu  $f$  der sogenannte Graph von  $f$ , nämlich die (Punkt-)Menge  $\{(x, y) \mid y = f(x)\}$ . Ist z.B.  $f(x) = x^2$ , so erhält man das Bild der sogenannten Normparabel.

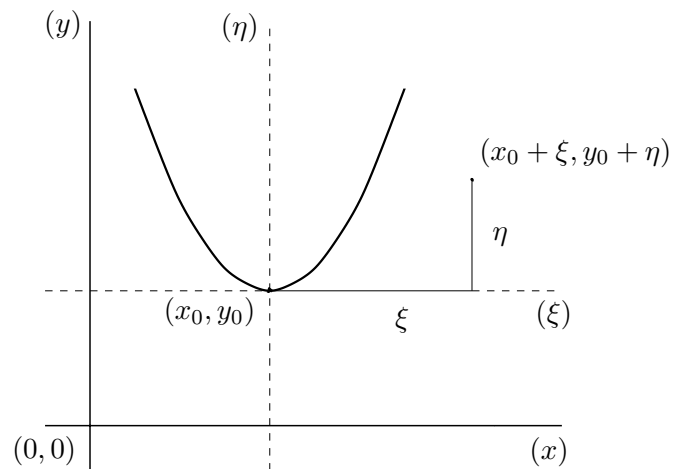


**Beispiel** Ist die Gleichung  $x^2 - y^2 = 1$  gegeben, so entspricht ihr in der  $(x, y)$ -Ebene die (Punkt-)Menge  $\{(x, y) \mid x^2 - y^2 = 1\}$ . Dies ist definitionsgemäss eine gleichseitige Hyperbel.



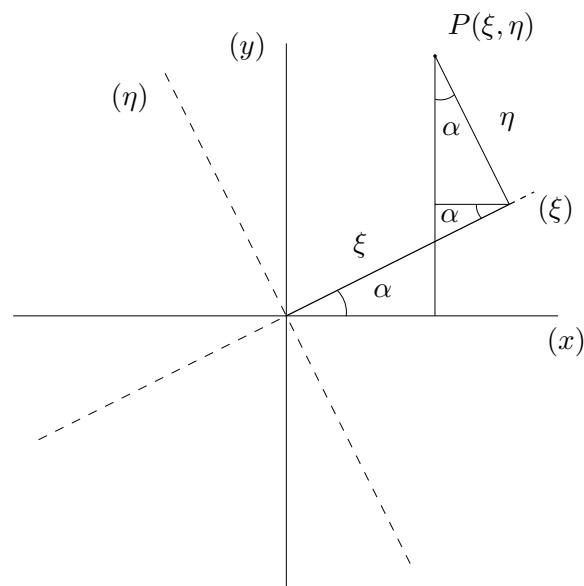
Es ist klar, dass es in der Ebene viele verschiedene Kartesische Koordinatensysteme gibt; sie gehen aber alle durch Parallelverschiebung und Drehung auseinander hervor. Wir untersuchen den Effekt dieses Wechsels an zwei ganz einfachen Beispielen.

**Beispiel** Das Kartesische  $(\xi, \eta)$ -Koordinatensystem sei aus dem  $(x, y)$ -Koordinatensystem durch Parallelverschiebung entstanden: die  $\xi$ -Achse ist parallel zur  $x$ -Achse und die  $\eta$ -Achse ist parallel zur  $y$ -Achse. Der Nullpunkt des  $(\xi, \eta)$ -Koordinatensystems habe im  $(x, y)$ -Koordinatensystem die Koordinaten  $(x_0, y_0)$ . Dann gilt die Beziehung  $(\xi, \eta) = (x - x_0, y - y_0)$ . Ist im  $(\xi, \eta)$ -Koordinatensystem die Normparabel  $\eta = \xi^2$  gegeben, so stellt diese sich im  $(x, y)$ -Koordinatensystem durch die Gleichung  $y - y_0 = (x - x_0)^2$ , also durch  $y = x^2 - 2x_0x + (x_0^2 + y_0)$  dar.



**Beispiel** Das Kartesische  $(\xi, \eta)$ -Koordinatensystem sei aus dem  $(x, y)$ -Koordinatensystem bei festem Nullpunkt durch Drehung um den Winkel  $\alpha$  entstanden. Dann gilt die Beziehung

$$\begin{aligned} x &= \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha \\ y &= \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha \end{aligned}$$



Es sei nun im  $(x, y)$ -Koordinatensystem die Hyperbel  $x^2 - y^2 = 1$  gegeben. Wählen wir  $\alpha = -\pi/4$ , so gilt

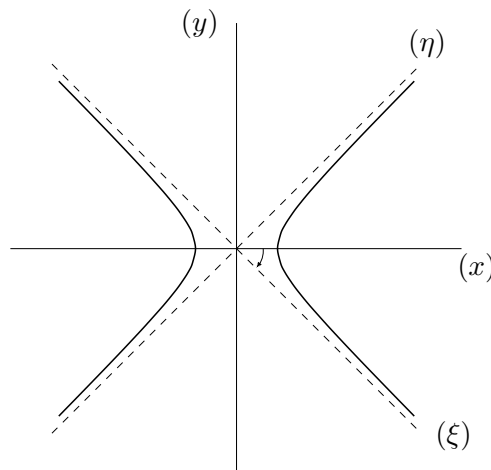
$$\begin{aligned} x &= \xi \frac{\sqrt{2}}{2} + \eta \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y &= -\xi \frac{\sqrt{2}}{2} + \eta \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich der Reihe nach

$$\begin{aligned} 1 &= x^2 - y^2 \\ 1 &= \frac{1}{2}(\xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2) - \frac{1}{2}(\xi^2 - 2\xi\eta + \eta^2) \\ 1 &= \frac{1}{2}4\xi\eta \\ 1 &= 2\xi\eta \end{aligned}$$

Die Gleichung der ursprünglich im  $(x, y)$ -Koordinatensystem gegebenen Hyperbel lautet im  $(\xi, \eta)$ -Koordinatensystem

$$\eta = \frac{1}{2} \frac{1}{\xi} .$$

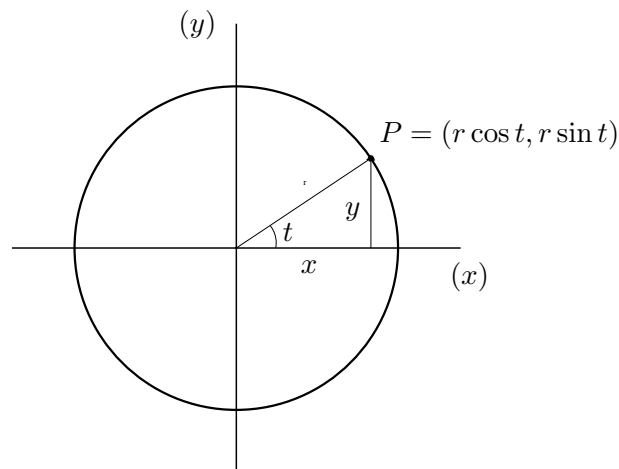


Neben Gleichungen zwischen  $x$  und  $y$  gibt es auch andere Arten, Kurven darzustellen. Will man z.B. die Bewegung eines punktförmigen Gegenstandes  $A$  in der  $(x, y)$ -Ebene beschreiben, so bietet sich an, die Koordinaten des Punktes anzugeben, an dem sich  $A$  zur Zeit  $t$  befindet, also  $x(t), y(t)$ .

**Beispiel** Es befinde sich  $A$  zur Zeit  $t$  beispielsweise im Punkt mit den Kartesischen Koordinaten  $(x(t), y(t)) = (r \cos t, r \sin t)$ . In diesem Fall beschreibt unser punktförmige Gegenstand im Laufe der Zeit einen Kreis mit Radius  $r$  um  $O$ . Es gilt nämlich

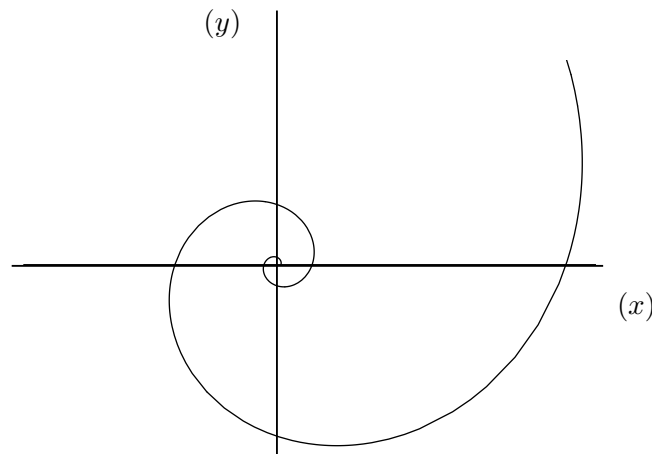
$$x(t)^2 + y(t)^2 = r^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = r^2 ,$$

so dass der Abstand zum Nullpunkt  $O$  immer gleich gross ist, nämlich  $r$ .

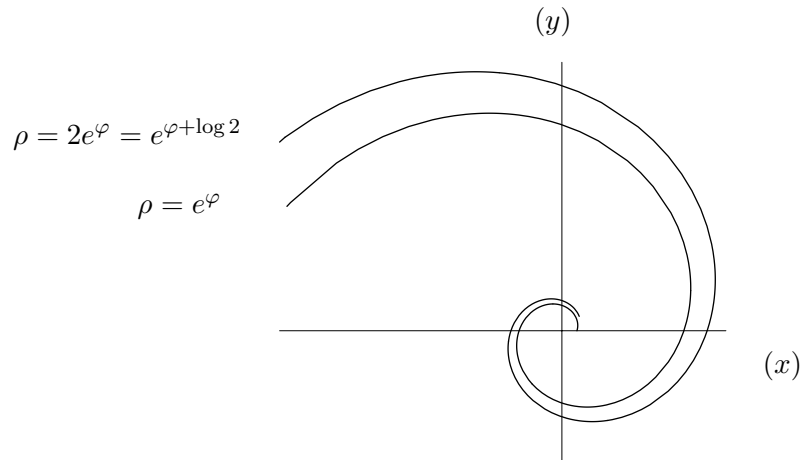


Schliesslich lässt sich eine Kurve auch durch eine Gleichung in Polarkoordinaten beschreiben.

**Beispiel** Es sei die Gleichung  $\rho = e^\varphi$  gegeben. Welche Punkte in der Ebene haben die Eigenschaft, dass ihre Polarkoordinaten  $(\rho, \varphi)$  diese Gleichung erfüllen? Es ist dies die logarithmische Spirale, die nach ihrem Entdecker Johann Bernoulli auch etwa Bernoullische Spirale genannt wird.

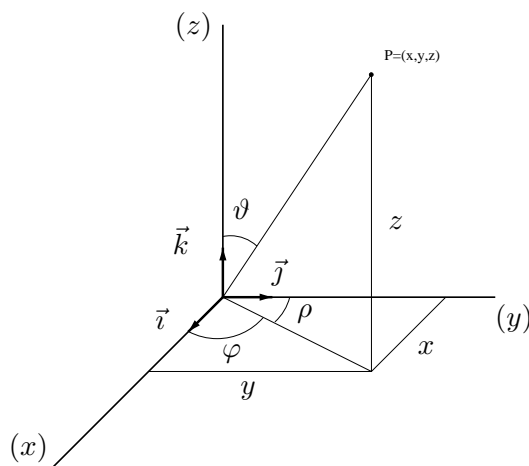


Strecken wir das Bild der logarithmischen Spirale vom Ursprung aus um den Faktor  $c$ ,  $c > 0$ , so erhalten wir die Kurve  $\rho = c \cdot e^\varphi$ . Nun gilt  $\rho = c \cdot e^\varphi = e^{\log c} \cdot e^\varphi = e^{\log c + \varphi}$ . Setzen wir  $\log c + \varphi = \psi$ , so folgt  $\rho = e^\psi$ . Das gestreckte Bild der logarithmischen Spirale ist also wieder die gleiche logarithmische Spirale, nur wird jetzt der Winkel anders gemessen: an Stelle von  $\varphi$  wird  $\psi = \log c + \varphi$  genommen. Das gestreckte Bild der Kurve entsteht also aus der ursprünglichen Spirale durch eine Drehung im Uhrzeigersinn um  $\varphi_0 = \log c$ .



## 2 Koordinatensysteme im Raum

Ein *Kartesisches Koordinatensystem* im Raum besteht aus einem Punkt  $O$  und aus drei senkrecht zueinander stehenden Einheitsvektoren  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ . Dabei geht man von der Konvention aus, dass diese drei Vektoren ein *rechtshändiges* System bilden. Die (Zahl-)Geraden in Richtung  $\vec{i}, \vec{j}$  und  $\vec{k}$  heissen die  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Achsen des Koordinatensystems. Jedem Punkt  $P$  im Raum entspricht ein Tripel  $(x, y, z)$  von Zahlen, dabei sind  $x, y$  die Koordinaten der Projektion  $P'$  von  $P$  (längs der  $z$ -Achse) auf die  $(x, y)$ -Ebene, und  $z$  beschreibt den (positiven oder negativen) Abstand von  $P$  von der  $(x, y)$ -Ebene. Die Zahlen  $x, y, z$  heissen die (Kartesischen) Koordinaten von  $P$  (bezüglich des gewählten Koordinatensystems). Das Zahlentripel  $(x, y, z)$  beschreibt dann die Lage des Punktes  $P$  im Raum. Umgekehrt entspricht jedem Zahlentripel  $(x, y, z)$  ein Punkt im Raum.





Neben dem Kartesischen Koordinatensystem gibt es andere. Zum Beispiel kann man in der  $(x, y)$ -Ebene eines räumlichen Koordinatensystems ein Polarkoordinatensystem benützen, um die Lage der Projektion  $P'$  zu beschreiben. Dann entsprechen dem Punkt  $P$  im Raum die drei Zahlen  $\rho, \varphi, z$  (in dieser Reihenfolge!). Man nennt dies die *Zylinder-Koordinaten* des Punktes  $P$ . Der Name kommt daher, dass alle Punkte des dreidimensionalen Raumes, die zur festen Zylinderkoordinaten  $\rho$  gehören, einen (Kreis-)Zylinder bilden (mit Achse gleich der  $z$ -Achse und mit Radius  $\rho$ ).

Um vom Zylinder-Koordinatensystem ins Kartesische Koordinatensystem, oder umgekehrt, zu wechseln, hat man folgende Umrechnungsformeln:

$$\begin{aligned}x &= \rho \cdot \cos \varphi \\y &= \rho \cdot \sin \varphi \\z &= z\end{aligned}$$

und

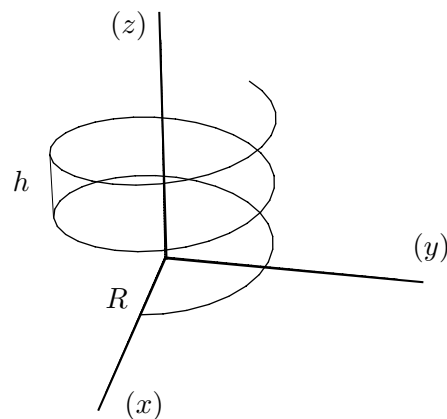
$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \varphi &= \frac{y}{x} \\ z &= z\end{aligned}$$

**Beispiel** Stellt man sich vor, dass die Kurve  $K$  im Raum entsteht, indem sich ein Punkt  $A$  auf  $K$  bewegt, so führt dies direkt auf die Beschreibung der Kurve durch eine Parameterdarstellung: Es werden die drei Koordinaten des Punktes  $A$  zur Zeit  $t$  angegeben,  $x(t), y(t), z(t)$ .

Die Parameterdarstellung (im Kartesischen Koordinatensystem)

$$\begin{aligned}x(t) &= R \cdot \cos t \\ y(t) &= R \cdot \sin t \\ z(t) &= \frac{h}{2\pi} \cdot t\end{aligned}$$

beschreibt auf diese Art eine Schraubenlinie mit reduzierter Ganghöhe  $h$  auf einem Kreis-Zylinder mit Radius  $R$  und Achse gleich der  $z$ -Achse.



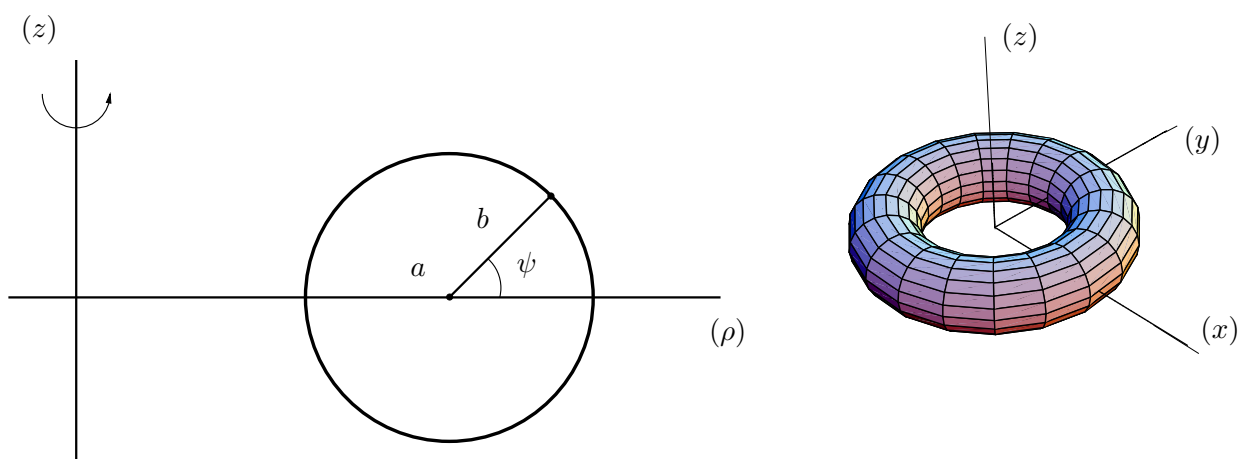
Wählt man ein Zylinder-Koordinatensystem, so stellt sich diese Schraubenlinie dar durch

$$\begin{aligned}\rho &= R \\ \varphi &= t \\ z(t) &= \frac{h}{2\pi} \cdot t\end{aligned}$$

**Beispiel** Man betrachte in der  $(\rho, z)$ -Ebene den Kreis  $K$  mit Radius  $b$  und Mittelpunkt  $(a, 0)$ . Rotiert dieser Kreis um die  $z$ -Achse, so entsteht ein sogenannter Torus. Der Kreis  $K$  hat (in der  $(\rho, z)$ -Ebene) die Gleichung

$$(\rho - a)^2 + z^2 = b^2.$$

Fasst man  $\rho$  und  $z$  als Zylinder-Koordinaten auf, so ist dies gleichzeitig die Gleichung des Torus.



Will man zum zugehörigen Kartesischen Koordinatensystem wechseln, so hat man alle Koordinaten in  $x, y, z$  auszudrücken. Damit erhält man

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - a\right)^2 + z^2 = b^2.$$

Man kann die Torusfläche auch mit Hilfe von Parametern beschreiben: Man erreicht offenbar jeden Punkt des Torus, wenn man auf dem Kreis  $K$  einen Punkt  $Q$  fixiert und diesen um die  $z$ -Achse rotieren lässt. Den Punkt  $Q$  auf dem Kreis können wir in der  $(\rho, z)$ -Ebene mittels einer Parameterdarstellung von  $K$  mit Parameter  $s$  beschreiben:

$$\begin{aligned}\rho &= a + b \cos s \\ z &= b \sin s\end{aligned}$$

Die Rotation um die  $z$ -Achse wird durch die Zylinderkoordinate  $\varphi$  beschrieben. Damit hat man die folgende Parameterdarstellung der Torusfläche in Zylinder-Koordinaten mit Parametern  $s$  und  $t$ :

$$\begin{aligned}\rho(s, t) &= a + b \cos s \\ \varphi(s, t) &= t \\ z(s, t) &= b \sin s\end{aligned}$$

Geht man zum zugehörigen Kartesischen Koordinatensystem über, so erhält man

$$\begin{aligned}x(s, t) &= (a + b \cos s) \cdot \cos t \\ y(s, t) &= (a + b \cos s) \cdot \sin t \\ z(s, t) &= b \sin s\end{aligned}$$

Variieren beide Parameter  $s$  und  $t$  zwischen 0 und  $2\pi$ , so erhält man die ganze Torusfläche.

Neben dem Kartesischen Koordinatensystem und dem Zylinder-Koordinatensystem spielt im dreidimensionalen Raum auch das sogenannte *Kugel-Koordinatensystem* eine Rolle. In diesem System wird die Lage eines Punktes  $P$  durch seinen Abstand  $r$  vom Nullpunkt und durch die beiden Winkel  $\varphi$  und  $\theta$  beschrieben. Der Winkel  $\varphi$  ist dabei der gleiche wie im Zylinder-Koordinatensystem und der Winkel  $\theta$  ist der Winkel zwischen der positiven  $z$ -Achse und der Verbindungsstrecke  $OP$ .

Ein Wechsel vom Kugel-Koordinatensystem ins Kartesische Koordinatensystem wird durch die folgenden Formeln beschrieben:

$$\begin{aligned}x &= r \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi \\ y &= r \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi \\ z &= r \cdot \cos \theta\end{aligned}$$

Beim Wechsel in der umgekehrten Richtung gelten die Formeln

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \tan \varphi &= \frac{y}{x} \\ \tan \theta &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \end{aligned}$$

**Beispiel** Eine Kugel mit Radius  $R$  und Mittelpunkt  $O$  stellt sich im Kartesischen Koordinatensystem durch die Gleichung

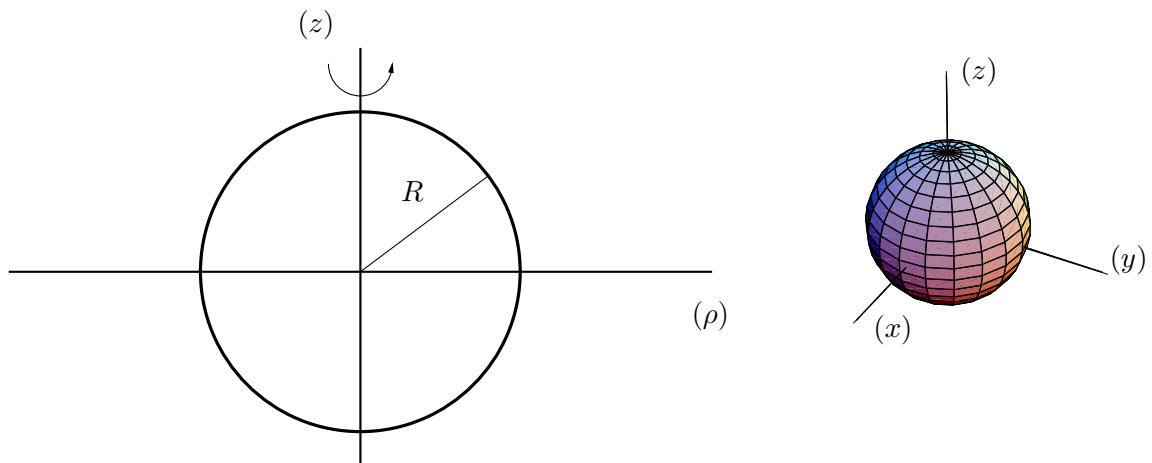
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

dar, im Zylinder-Koordinatensystem durch

$$\rho^2 + z^2 = R^2$$

und im Kugel-Koordinatensystem durch

$$r = R .$$



Die Tatsache, dass im Kugel-Koordinatensystem zu festem  $r$  eine Kugeloberfläche gehört, ist natürlich der Grund für die Namensgebung.