

4 Der Zwischenwertsatz für stetige Funktionen

Satz Es sei $f : x \rightarrow f(x)$ eine auf $[a, b]$ stetige Funktion. Es sei m irgendein Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann gibt es (mindestens) ein ξ mit $f(\xi) = m$.

Bevor wir diesen Satz beweisen, wollen wir noch folgende Bemerkungen einfügen. Wenn der Graph von f eine "Kurve" im anschaulichen Sinn ist, so ist die Aussage des Satzes insofern klar, als diese Kurve ja die Horizontale $y = m$ mindestens einmal kreuzen muss. Gelingt es uns, diese Tatsache auf analytische Weise zu beweisen, indem wir von der Funktion f weiter nichts als die Stetigkeit voraussetzen, so bedeutet dies, dass der Graph einer stetigen Funktion unserem intuitiven Bild einer "Kurve" weitgehend entspricht.

Beweis Wir nehmen an, dass $f(a) \leq m$ und $f(b) \geq m$ gilt. Der Beweis im andern Fall verläuft ganz analog. Wir konstruieren ein ξ mit der verlangten Eigenschaft als Grenzwert von zwei Folgen von Zahlen in $[a, b]$. Wir definieren Folgen x_1, x_2, \dots und y_1, y_2, \dots rekursiv wie folgt. Wir setzen $x_1 = a, y_1 = b$. Sind x_1, x_2, \dots, x_i und y_1, y_2, \dots, y_i bereits definiert, so definieren wir x_{i+1} und y_{i+1} durch

$$x_{i+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}(x_i + y_i), & \text{falls } f(\frac{1}{2}(x_i + y_i)) < m, \\ x_i, & \text{falls } f(\frac{1}{2}(x_i + y_i)) \geq m, \end{cases}$$

$$y_{i+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}(x_i + y_i), & \text{falls } f(\frac{1}{2}(x_i + y_i)) \geq m, \\ y_i, & \text{falls } f(\frac{1}{2}(x_i + y_i)) < m. \end{cases}$$

Man sieht sofort, dass die Folge x_1, x_2, \dots monoton wachsend und die Folge y_1, y_2, \dots monoton fallend ist. Da beide Folgen beschränkt sind, müssen sie konvergieren. Wir behaupten, dass ihre Grenzwerte übereinstimmen. Es ist

$$y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{y_n - x_n}{2} = \frac{y_{n-1} - x_{n-1}}{4} = \dots = \frac{y_1 - x_1}{2^n} = \frac{b - a}{2^n}.$$

Daraus folgt

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Wir setzen

$$\lim y_n = \xi = \lim x_n.$$

Laut Definition der beiden Folgen gilt $f(x_n) \leq m$ für alle $n = 1, 2, \dots$ und $f(y_n) \geq m$ für alle $n = 1, 2, \dots$. Schliesslich verwenden wir die Stetigkeit der Funktion f an der Stelle ξ , um die Ungleichungen

$$f(\xi) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) \leq m,$$

$$m \leq \lim f(y_n) = f(\lim y_n) = f(\xi)$$

zu erhalten. Daraus ergibt sich sofort $f(\xi) = m$. Dies war zu beweisen.

Das in diesem Beweis angegebene explizite Verfahren kann verwendet werden, um Gleichungen, insbesondere transzendente Gleichungen zu lösen.

Beispiel Um die Lösung der Gleichung $x = e^{-x}$ zu finden, betrachte man die Funktion $f : x \rightarrow x - e^{-x}$. Diese ist sicherlich stetig. Ferner ist $f(0) = -1$ und $f(1) = 1 - e^{-1} \sim 2/3$. Um den (offenbar einzigen) Wert ξ mit $f(\xi) = 0$ zu bestimmen, wendet man das obige Verfahren auf das Intervall $[0, 1]$ und den Wert $m = 0$ an. Die folgende Tabelle zeigt die Werte der Glieder der beiden Folgen.

i	x_i	y_i
1	0.	1.
2	0.5	1.
3	0.5	0.75
4	0.5	0.625
5	0.5625	0.625
6	0.5625	0.59375
7	0.5625	0.578125
8	0.5625	0.5703125
9	0.56640625	0.5703125
10	0.56640625	0.568359375
11	0.56640625	0.5673828125
12	0.5668945313	0.5673828125
13	0.5671386719	0.5673828125
14	0.5671386719	0.5672607422
15	0.5671386719	0.567199707
16	0.5671386719	0.5671691895
17	0.5671386719	0.5671539307
18	0.5671386719	0.5671463013
19	0.5671424866	0.5671463013
20	0.5671424866	0.5671443939

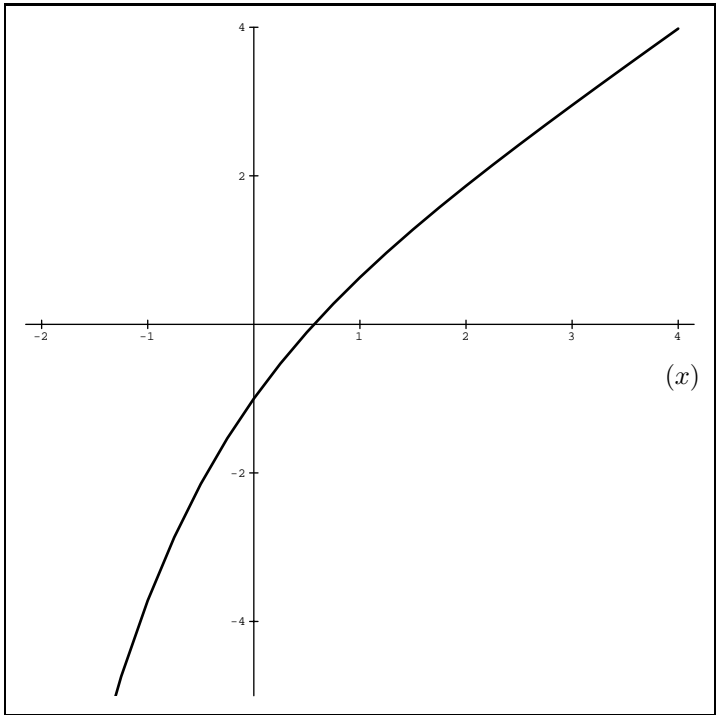


FIG. 1 :
Die Funktion $x \rightarrow x - e^{-x}$

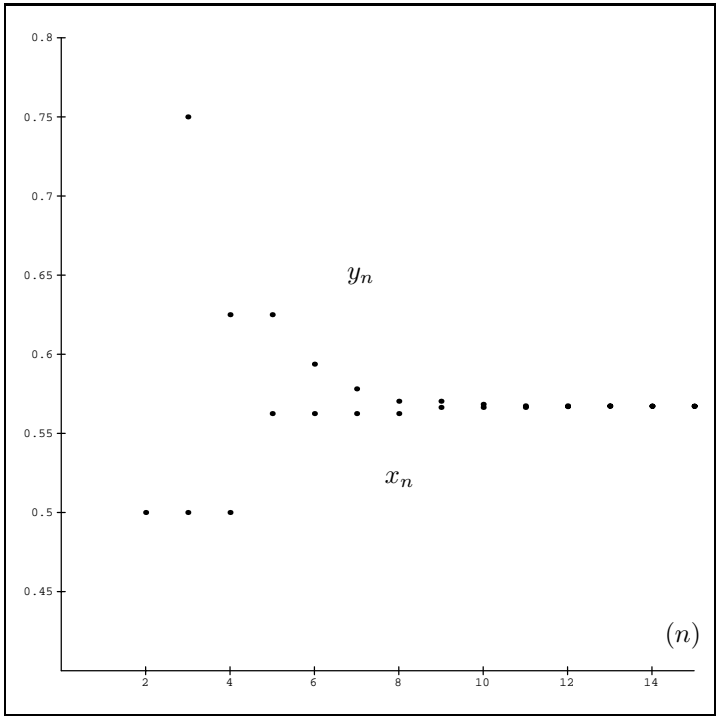


FIG. 2 :
Die Folgen x_n und y_n