

5 Koordinatentransformationen

In diesem Abschnitt studieren wir, wie sich einfache Koordinatentransformationen auf den Graphen einer Funktion f auswirken. Wir illustrieren dies durch Beispiele. Dabei gehen wir aus von der Funktion (siehe Figur 1)

$$f : x \rightarrow 2x^3 - 3x^2 - 6x + 6.$$

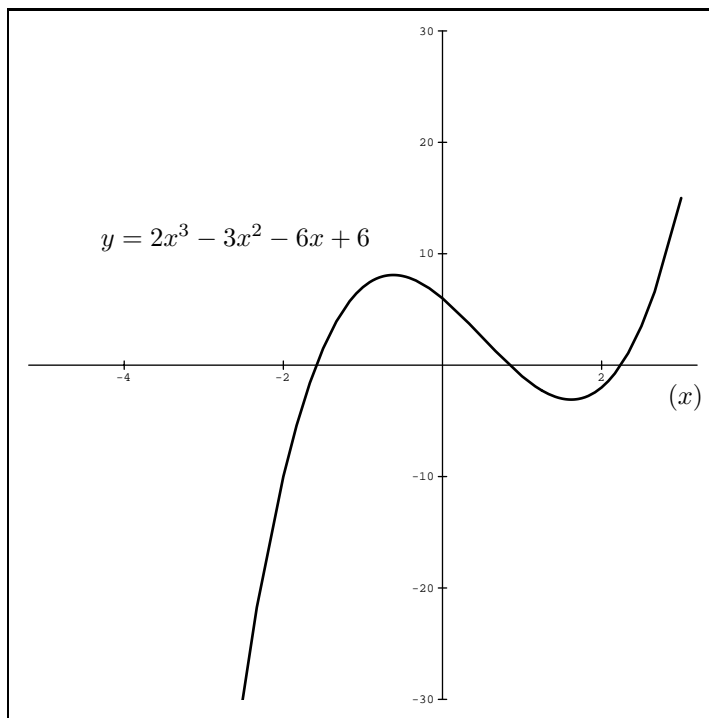


FIG. 1 :

$$f : x \rightarrow 2x^3 - 3x^2 - 6x + 6$$

(1) Die Funktion $f_1 : x \rightarrow f(x + a)$

Wir setzen zur Illustration $a = 2$, dann gilt

$$f_1 : x \rightarrow 2(x + 2)^3 - 3(x + 2)^2 - 6(x + 2) + 6 = 2x^3 + 9x^2 + 6x - 2.$$

Der Graph von f_1 entsteht aus den Graphen von f durch Verschiebung um a Einheiten in Richtung der *negativen* x -Achse (siehe Figur 2).

(2) Die Funktion $f_2 : x \rightarrow f(x) + b$

Wir setzen zur Illustration $b = 4$; dann erhalten wir

$$f : x \rightarrow 2x^3 - 3x^2 - 6x + 10.$$

Man erhält den Graphen von f_2 , indem man den Graphen von f um b Einheiten in Richtung der positiven y -Achse verschiebt (siehe Figur 3).

(3) Die Funktion $f_3 : x \rightarrow f(cx), c > 0$

Wir setzen zur Illustration $c = 2$, dann gilt

$$f_3(x) = 16x^3 - 12x^2 - 12x + 6.$$

Man erhält den Graphen von f_3 , indem man den Graphen von f in Richtung der x -Achse um den Faktor c “staucht” (siehe Figur 4).

Ist $0 < c < 1$, so resultiert eine “Dehnung” in Richtung der x -Achse. Setzen wir $c = 1/2$, so gilt

$$\bar{f}_3(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - 3x + 6.$$

(4) Die Funktion $f_4(x) = df(x), d > 0$

Wieder setzen wir $d = 2$; es gilt

$$f_4(x) = 4x^3 - 6x^2 - 12x + 12.$$

Man erhält den Graphen von f_4 , indem man den Graphen von f in Richtung der y -Achse um den Faktor d “streckt” (siehe Figur 5).

(5) Die Funktion $f_5(x) = 1/f(x)$

Man erhält

$$f_5(x) = 1/(2x^3 - 3x^2 - 6x + 6).$$

Wo die Funktion f Nullstellen hat, besitzt f_5 Pole. Ferner gilt natürlich (siehe Figur 6)

$$|f(x_0)| < 1 \Rightarrow |f_5(x_0)| > 1,$$

$$|f(x_0)| > 1 \Rightarrow |f_5(x_0)| < 1.$$

(6) Die Funktion $f_6(x) = f(1/x)$

Ist $|x| < 1$, so folgt $|1/x| > 1$ und zwar ist $|1/x|$ umso grösser, je kleiner $|x|$ ist. Ist umgekehrt $|x| > 1$, so folgt $|1/x| < 1$ und zwar ist $|1/x|$ umso kleiner, je grösser $|x|$ ist (siehe Figur 7). Das Verhalten der Funktion f_6 im Intervall $-1 < x < +1$ “spiegelt” also das Verhalten der Funktion f für $|x| > 1$. Umgekehrt “spiegelt” das Verhalten von f_6 für grosse Werte von $|x|$, wie sich f im Einheitsintervall verhält, z.B. gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_6(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} f(\xi) = 6.$$

Kennt man den Einfluss dieser sechs einfachen Koordinatentransformationen gut, so kann man Graphen von einfacheren Funktionen oft sehr leicht skizzieren. Wir zeigen dies anhand der folgenden Beispiele.

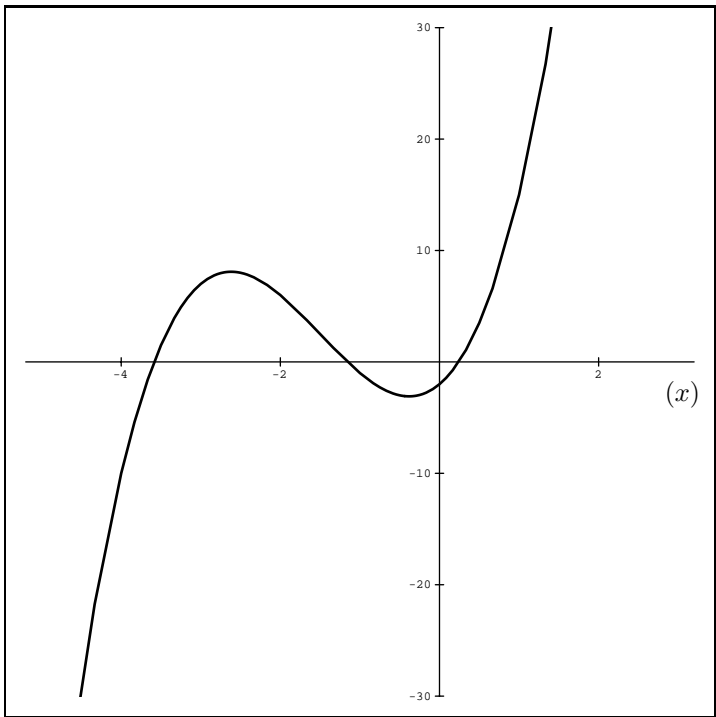


FIG. 2 :

$$f_1(x) = f(x + 2)$$

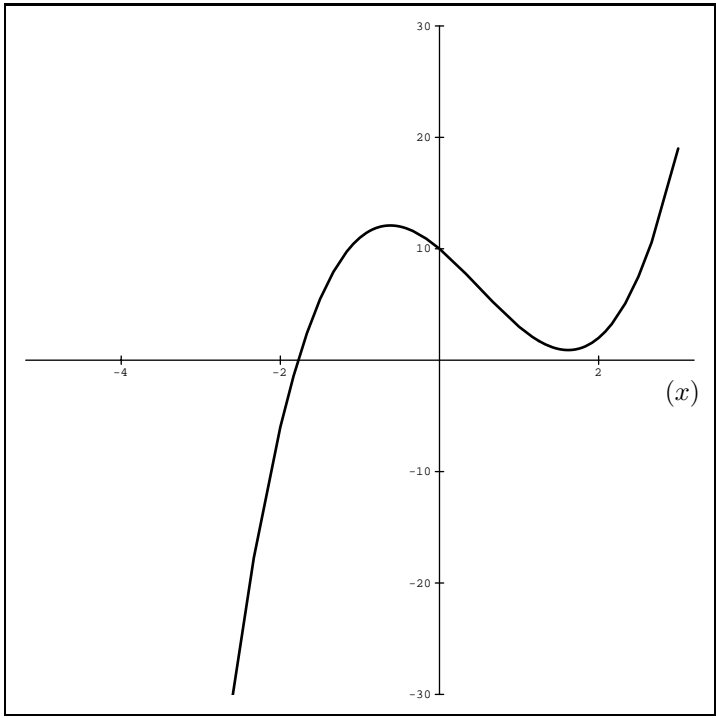


FIG. 3 :

$$f_2(x) = f(x) + 4$$

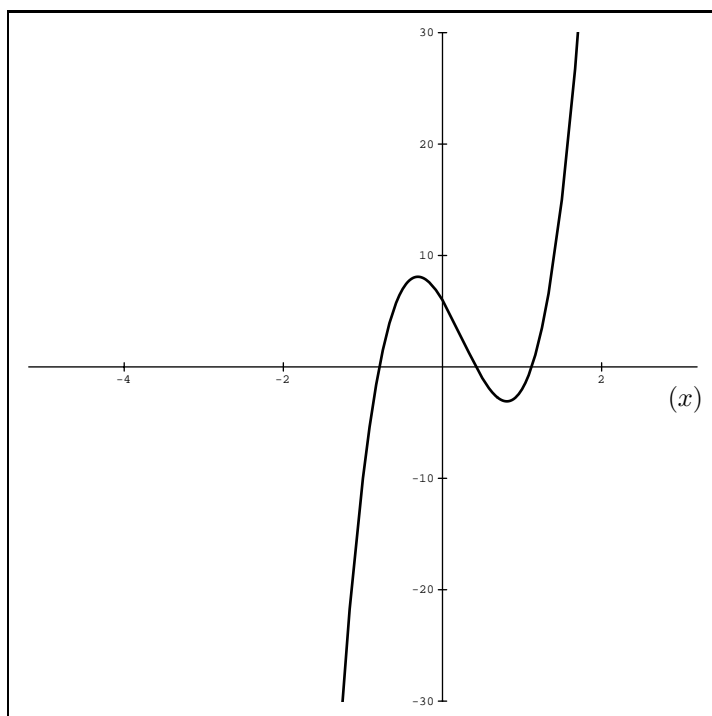


FIG. 4:

$$f_3(x) = f(2x)$$

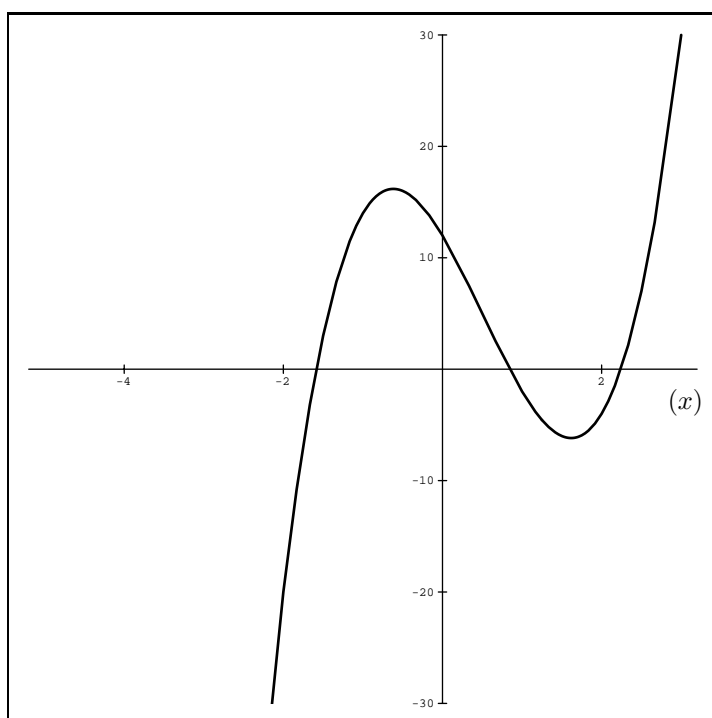


FIG. 5:

$$f_4(x) = 2f(x)$$

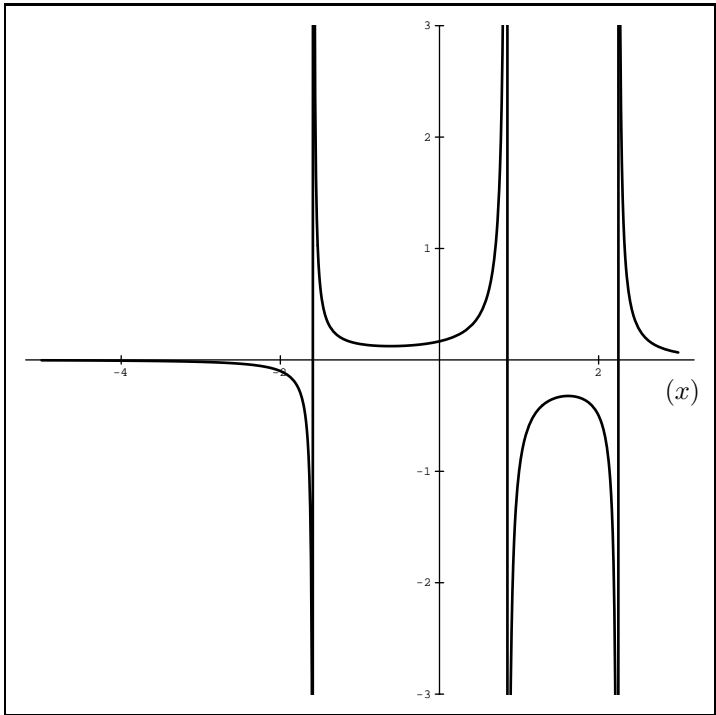


FIG. 6:

$$f_5(x) = 1/f(x)$$

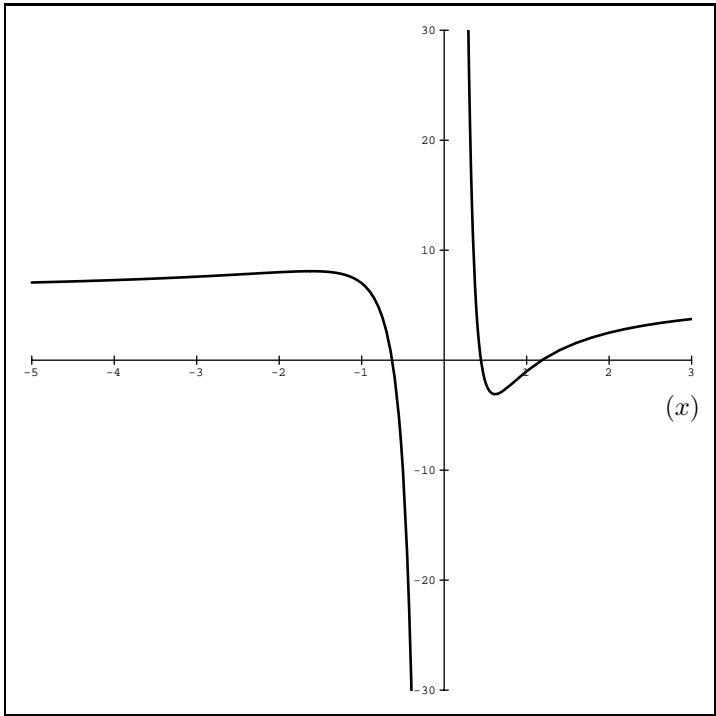


FIG. 7:

$$f_6(x) = f(1/x)$$

Beispiel

$$x \rightarrow f(x) = \frac{3}{(x+5)(x-2)}$$

Die Nennerfunktion $x \rightarrow (x+5)(x-2) = (x^2 + 3x - 10)$ ist quadratisch mit Nullstellen $-5, 2$. Ihr Graph ist folglich eine Parabel, die die x -Achse in -5 und 2 schneidet und nach oben geöffnet ist (der Koeffizient von x^2 ist positiv). Aus Symmetriegründen ist der Scheitel bei $x = -3/2$ zu finden. Die Transformation (5) liefert sofort den Graphen der Funktion

$$x \rightarrow \frac{1}{(x+5)(x-2)}.$$

Schliesslich liefert die Transformation (3) den Graphen von f durch “Streckung” in Richtung der y -Achse um den Faktor 3. Fragen, etwa nach der Lage der Extremalstellen von f , lassen sich nun ohne Rechnung sofort beantworten.

Beispiel In einem weiteren Beispiel betrachten wir die Funktion

$$g : x \rightarrow 2 \cos \left(3x + \frac{1}{2} \right) .$$

Ausgehend vom Graph der Cosinus-Funktion $x \rightarrow \cos x$ (siehe Figur 8) erhalten wir den Graphen von $x \rightarrow \cos(3x)$ durch “Stauchung” in Richtung der x -Achse (siehe Figur 9). Der Graph von $x \rightarrow \cos(3x + \frac{1}{2}) = \cos(3(x + \frac{1}{6}))$ geht aus dem Graphen von $x \rightarrow \cos(3x)$ durch Verschiebung um $\frac{1}{6}$ in Richtung der negativen x -Achse hervor (siehe Figur 10). Schliesslich erhält man den Graphen von g durch Streckung um den Faktor 2 in Richtung der y -Achse (siehe Figur 11).

Die betrachtete Funktion g ist von der Form

$$t \rightarrow A \cos(\omega t + \varphi),$$

welche bei Schwingungsproblemen auftritt, wobei t natürlich die Zeit bedeutet. Von dieser Anwendung her erhalten die einzelnen Konstanten die folgenden Namen:

Die Grösse A , $A > 0$ heisst *Amplitude*. Sie gibt den Wert des grössten Schwingungsausschlages an. Die Grösse $\omega > 0$ heisst *Kreisfrequenz*. Eine volle Schwingung wird in $2\pi/\omega = T$ absolviert; T heisst die *Schwingungsdauer*. Pro Zeiteinheit werden $1/T = \omega/2\pi =: \nu$ Schwingungen durchgeführt; ν heisst die *Frequenz* der Schwingung. Die Konstante φ , $-\pi < \varphi < \pi$ heisst *(Null-)Phasenwinkel*.

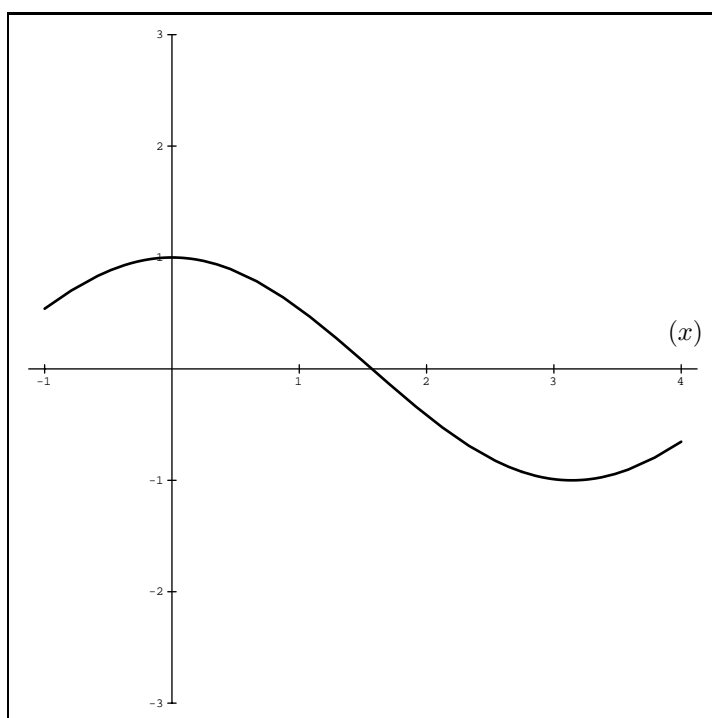


FIG. 8:

$$x \rightarrow \cos x$$

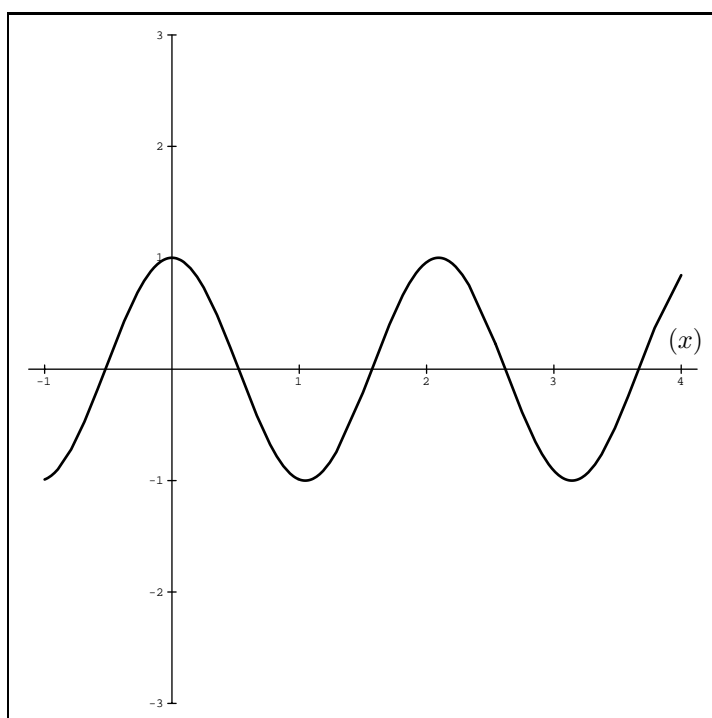


FIG. 9:

$$x \rightarrow \cos(3x)$$

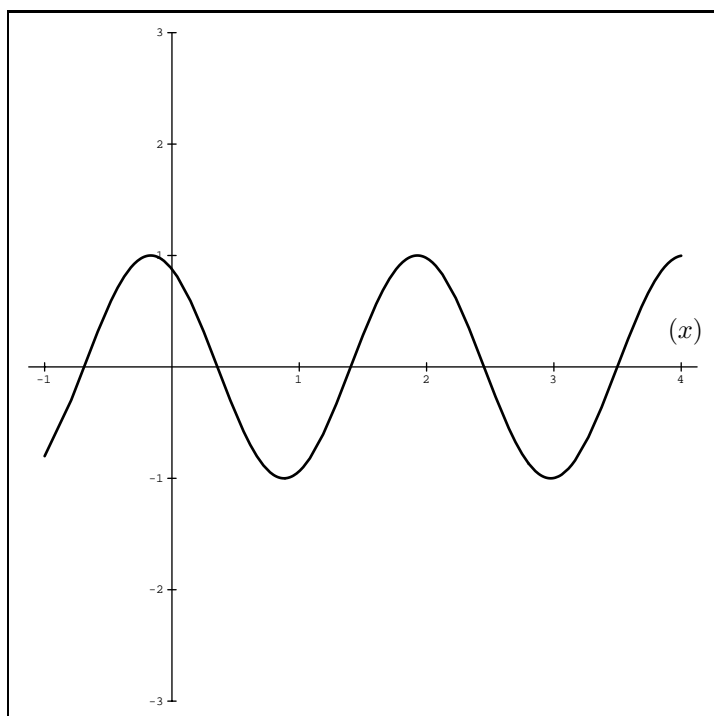


FIG. 10 :

$$x \mapsto \cos\left(3x + \frac{1}{2}\right)$$

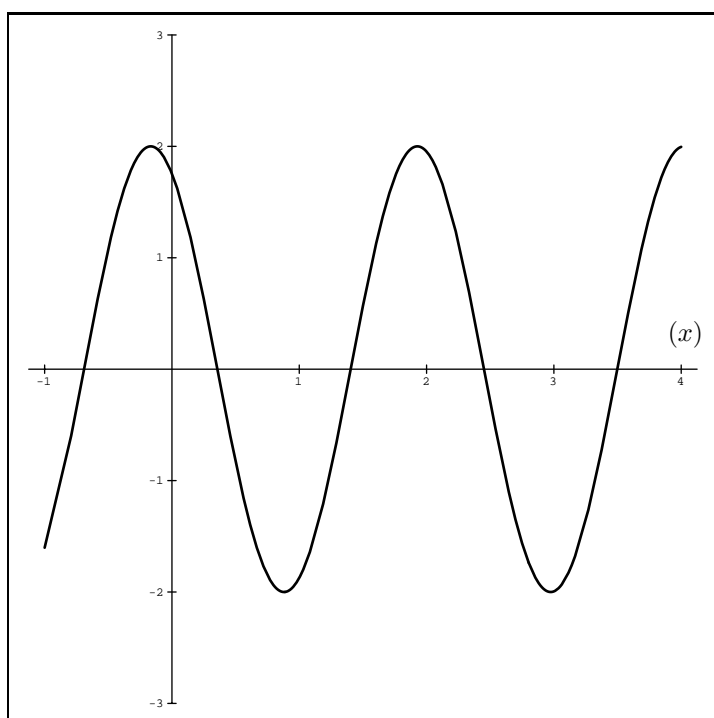


FIG. 11 :

$$x \mapsto 2 \cos\left(3x + \frac{1}{2}\right)$$