

## 6 Die inverse Funktion

Bekanntlich kann es vorkommen, dass eine Funktion  $f : x \rightarrow f(x)$  für verschiedene Werte  $x_1, x_2 \in D(f)$  denselben Funktionswert  $y_0$  annimmt; z.B. gilt für  $f : x \rightarrow x^2$  natürlich  $f(-2) = 4 = f(2)$ . Graphisch äussert sich dies darin, dass die Parallele zur  $x$ -Achse auf dem Niveau  $y_0$  den Graphen von  $f$  in mehreren Punkten schneidet. Funktionen, bei denen dieses Phänomen *nicht* auftritt, heissen *injektiv*.

Eine Funktion  $f : x \rightarrow f(x)$ ,  $D(f)$  heisst **injektiv**, wenn gilt:

- Aus  $x_1 \neq x_2$ ,  $x_1, x_2 \in D(f)$  folgt stets  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .

Gleichbedeutend mit dieser Forderung ist offenbar jede der folgenden beiden Bedingungen

- Falls  $f(x_1) = f(x_2)$ , so folgt  $x_1 = x_2$ .
- Jede Parallele zur  $x$ -Achse schneidet den Graphen von  $f$  in höchstens einem Punkt.

Ist  $f : x \rightarrow f(x)$ ,  $D(f)$  eine injektive Funktion, so gibt es zu jedem  $y \in W(f)$  genau ein  $x \in D(f)$  mit  $f(x) = y$ . Somit können wir eine Umkehrfunktion  $f^{-1}$  definieren:

- $f^{-1} : y \rightarrow f^{-1}(y) = \text{dasjenige eindeutig bestimmte } x \text{ mit } f(x) = y$ .

Offenbar gilt  $D(f^{-1}) = W(f)$  und  $W(f^{-1}) = D(f)$ . Die so definierte Funktion  $f^{-1}$  heisst die zu  $f$  **inverse Funktion**.

Dem Leser muss sich an dieser Stelle gut klar machen, dass die inverse Funktion  $f^{-1}$  nur dann definiert werden kann, wenn  $f$  injektiv ist.

Laut Definition gilt  $x \in D(f)$  die Gleichung

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

und für alle  $x \in D(f^{-1})$

$$f(f^{-1}(x)) = x.$$

Die Funktion  $f^{-1}$  ist automatisch injektiv (warum?). Deshalb kann zu  $f^{-1}$  wiederum die inverse Funktion  $(f^{-1})^{-1}$  gebildet werden. Offenbar gilt  $(f^{-1})^{-1} = f$ .

Die Beziehung zwischen  $f$  und  $f^{-1}$  lässt sich graphisch leicht veranschaulichen. Ist nämlich  $(a, b)$  ein Punkt des Graphen von  $f$ , so hat man  $f(a) = b$ . Laut Definition von  $f^{-1}$  gilt dann  $a = f^{-1}(b)$ . Daraus folgt, dass  $(b, a)$  ein Punkt des Graphen von  $f^{-1}$  ist. Die Punkte  $(a, b)$  und  $(b, a)$  liegen im kartesischen Koordinatensystem spiegelbildlich zur ersten Winkelhalbierenden  $y = x$ . Wir schliessen daraus, dass die Graphen von  $f$  und  $f^{-1}$  durch Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden auseinander hervorgehen.

**Beispiel** Es sei die lineare Funktion

$$f : x \rightarrow ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0, \quad D(f) = \mathbb{R}$$

gegeben. Wir behaupten zuerst, dass  $f$  injektiv ist. Aus

$$f(x_1) = ax_1 + b = ax_2 + b = f(x_2)$$

folgt  $ax_1 = ax_2$  und daraus wegen  $a \neq 0$  sofort  $x_1 = x_2$ . Damit ist  $f$  in der Tat injektiv und die inverse Funktion  $f^{-1}$  existiert. Aus  $y = ax + b$  folgt  $x = (y - b)/a$ . Somit gilt

$$f^{-1} : y \rightarrow \frac{y - b}{a}$$

oder besser

$$f^{-1} : x \rightarrow \frac{x - b}{a}, \quad D(f^{-1}) = \mathbb{R},$$

da ja als Name des Argumentes üblicherweise  $x$  verwendet wird (siehe Figur 1).

**Beispiel** Die Exponentialfunktion  $f : x \rightarrow a^x$ ,  $a > 1$  ist auf ihrem ganzen Definitionsbereich strikt monoton wachsend. Wegen  $a^h > 1$  für  $h > 0$  ergibt sich nämlich  $a^{x+h} = a^x \cdot a^h > a^x$ . Die Exponentialfunktion ist also injektiv und die dazu inverse Funktion  $f^{-1}$  existiert. Diese ist durch die Vorschrift

$$f^{-1} : y \rightarrow \text{Zahl, mit der } a \text{ potenziert werden muss, um } y \text{ zu erhalten}$$

definiert. Wir nennen die so definierte Zahl den *Logarithmus von  $y$  zur Basis  $a$* , und wir schreiben  $x = f^{-1}(y) = {}^a\log y$ . Laut Definition gilt

$$\begin{aligned} D({}^a\log x) &= W(a^x) = (0, \infty), \\ W({}^a\log x) &= D(a^x) = (-\infty, \infty). \end{aligned}$$

Der Graph der Logarithmusfunktion

$${}^a\log : x \rightarrow {}^a\log x, \quad D({}^a\log x) = (0, \infty)$$

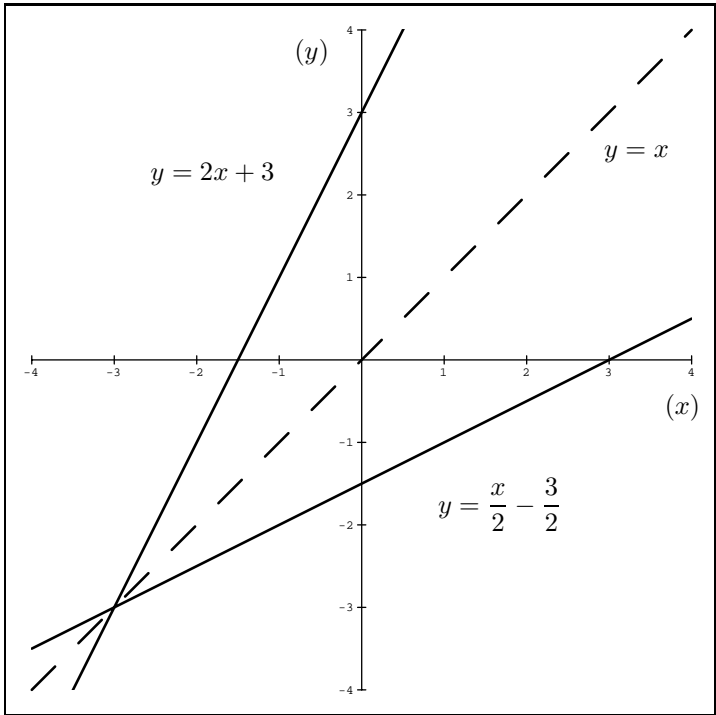


FIG. 1 :

$x \rightarrow 2x + 3$   
 $x \rightarrow \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$

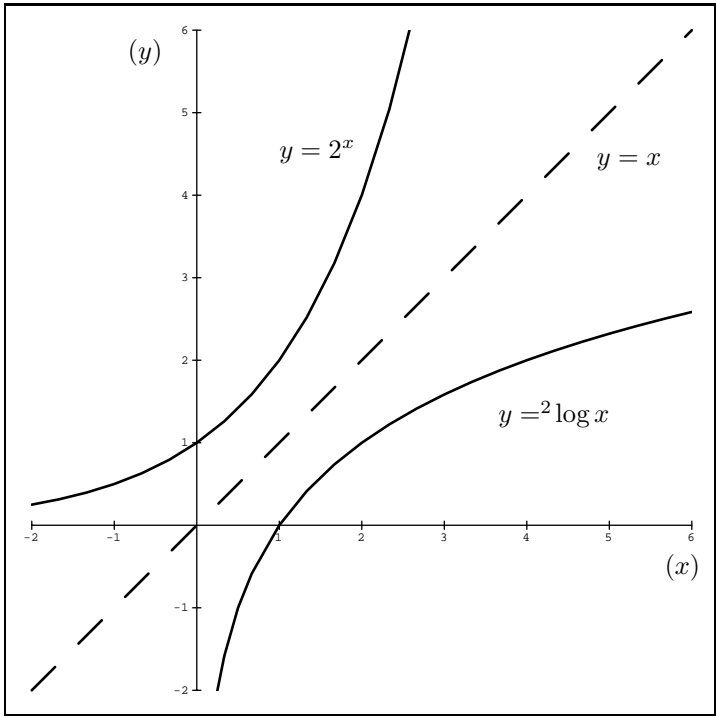


FIG. 2 :

$x \rightarrow 2^x$   
 $x \rightarrow {}^2\log x$

ergibt sich durch Spiegelung des Graphen der Exponentialfunktion  $x \rightarrow a^x$  an der ersten Winkelhalbierenden (siehe Figur 2).

**Beispiel** Wie wir bereits festgestellt haben, ist die Quadratfunktion

$$f : x \rightarrow x^2, D(f) = \mathbb{R}$$

nicht injektiv. Es gibt also zu  $f$  keine inverse Funktion. Hingegen kann man durch Einschränken des Definitionsbereiches zu einer verwandten Funktion  $f_1$  übergehen, die injektiv ist und zu der folglich eine inverse Funktion existiert. Für diese Einschränkung gibt es mehrere Möglichkeiten, von denen wir zwei genauer ansehen. Wir betrachten zuerst die Funktion

$$f_1 : x \rightarrow x^2, D(f_1) = [0, \infty).$$

Wegen  $f_1'(x) > 0$  für  $0 < x$  ist  $f_1$  strikt monoton wachsend und deshalb injektiv. Die dazu inverse Funktion  $f_1^{-1}$  ist definiert durch

$$f_1^{-1} : x \rightarrow \sqrt{x}, D(f_1^{-1}) = [0, \infty).$$

Die Graphen von  $f$  und  $f_1^{-1}$  gehen durch Spiegelung an der Geraden  $y = x$  auseinander hervor (siehe Figur 3).

Als zweites betrachten wir die Funktion

$$f_2 : x \rightarrow x^2, D(f_2) = (-\infty, 0].$$

Diese ist wegen  $f_2'(x) < 0$  für  $x < 0$  strikt monoton fallend und deshalb injektiv. Die dazu inverse Funktion ist gegeben durch

$$f_2^{-1} : x \rightarrow -\sqrt{x}, D(f_2^{-1}) = [0, \infty).$$

Wiederum liegen die Graphen der beiden Funktionen  $f_2$  und  $f_2^{-1}$  spiegelbildlich zur Geraden  $y = x$  (siehe Figur 4).

**Beispiel** Die Funktion

$$f : x \rightarrow \sqrt{x^2 - 1}, D(f) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

ist offensichtlich eine gerade Funktion. Sie ist also sicher nicht injektiv. Die Einschränkung des Definitionsbereiches auf  $[1, \infty)$  liefert aber die injektive Funktion

$$f_1 : x \rightarrow \sqrt{x^2 - 1}, D(f) = [1, \infty).$$

Aus  $f_1(x_1) = \sqrt{x_1^2 - 1} = \sqrt{x_2^2 - 1} = f_1(x_2)$  folgt nämlich der Reihe nach

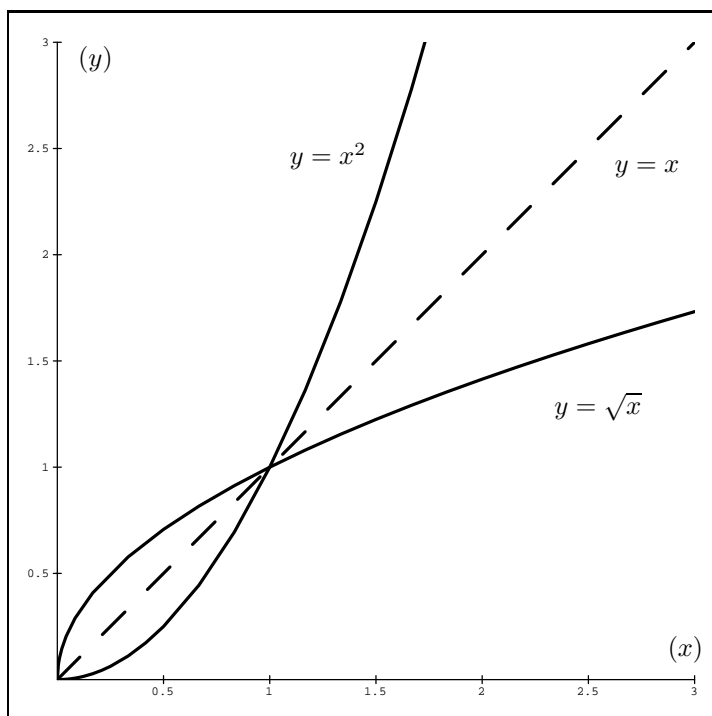


FIG. 3:

$$f_1 : x \rightarrow x^2, D(f_1) = [0, \infty)$$

$$f_1^{-1} : x \rightarrow \sqrt{x}$$

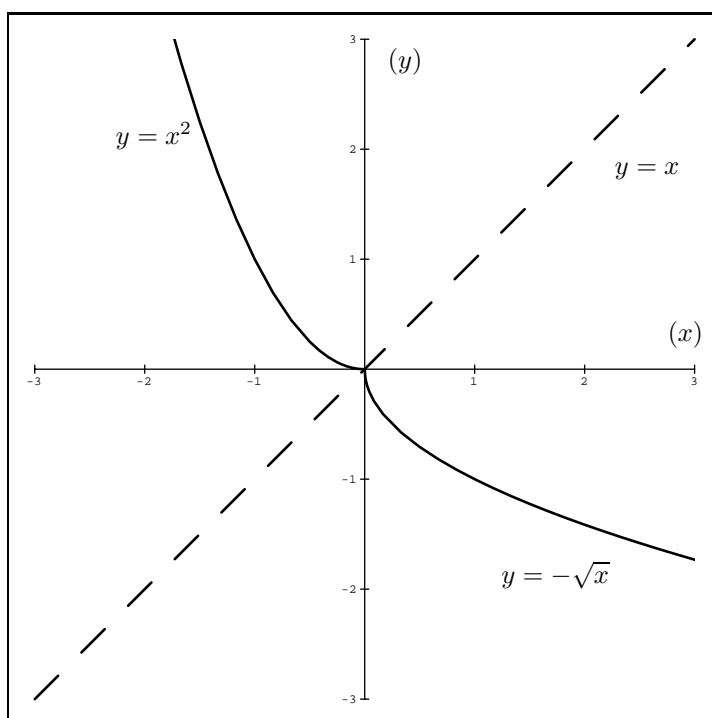


FIG. 4:

$$f_2 : x \rightarrow x^2, D(f_2) = (-\infty, 0]$$

$$f_2^{-1} : x \rightarrow -\sqrt{x}$$

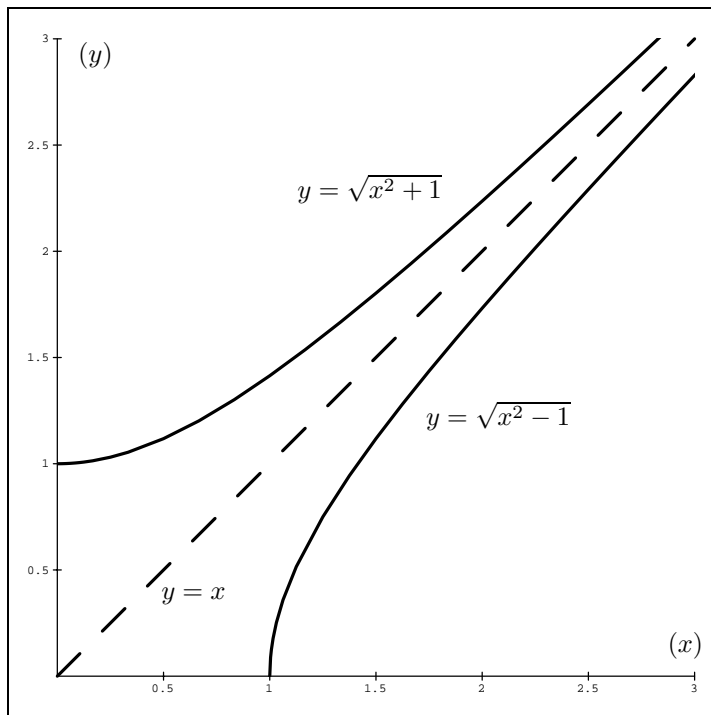


FIG. 5:

$$f_1 : x \rightarrow \sqrt{x^2 - 1}, D(f) = [1, \infty)$$

$$f_1^{-1} : x \rightarrow \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\begin{aligned} x_1^2 - 1 &= x_2^2 - 1, \\ x_1^2 &= x_2^2, \\ x_1 &= x_2. \end{aligned}$$

Letzteres folgt, weil  $x_1$  und  $x_2$  im Intervall  $[1, \infty)$  liegen! Damit ist  $f_1$  injektiv und die dazu inverse Funktion existiert. Man berechnet

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x^2 - 1}, \\ y^2 &= x^2 - 1, \\ y^2 + 1 &= x^2, \\ \sqrt{y^2 + 1} &= x. \end{aligned}$$

Letzteres folgt, weil  $x$  im Intervall  $[1, \infty)$  liegt. Die inverse Funktion (siehe Figur 5)  $f_1^{-1}$  ist somit gegeben durch die Vorschrift

$$f_1^{-1} : x \rightarrow \sqrt{x^2 + 1}, D(f_1^{-1}) = W(f_1) = [0, \infty).$$

Ähnlich wie in den letzten beiden Beispielen geht man bei den trigonometrischen Funktionen vor. Man schränkt den Definitionsbereich geeignet ein, um eine injektive Funktion zu erhalten und geht dann zur inversen Funktion über. Auf diese Art und Weise gelangt man zu den sogenannten **zyklometrischen Funktionen**.

**Arcus sinus** Wir betrachten zuerst die Funktion

$$f : x \rightarrow \sin x, \quad D(f) = [-\pi/2, +\pi/2] .$$

Man beachte den eingeschränkten Definitionsbereich! Mit Hilfe der Ableitung sieht man sofort, dass die Funktion  $f$  strikt monoton wachsend ist, also ist sie injektiv. Die zu  $f$  inverse Funktion  $f^{-1}$  heisst definitionsgemäss arcsin (“arcus sinus”). Sie ist durch die Vorschrift

$$\arcsin : x \rightarrow f^{-1}(x) = y = \text{derjenige Winkel, zwischen } -\pi/2 \text{ und } +\pi/2, \text{ dessen Sinus } x \text{ ist}$$

gegeben. Es gilt  $D(f^{-1}) = W(f) = [-1, +1]$  und  $W(f^{-1}) = D(f) = [-\pi/2, +\pi/2]$ . Den Graphen von arcsin erhält man durch Spiegelung an der Geraden  $y = x$  (siehe Figuren 6,7).

**Arcus cosinus** Die zu

$$f : x \rightarrow \cos x, \quad D(f) = [0, \pi]$$

inverse Funktion heisst arccos (“arcus cosinus”). Dabei gilt für Definitions- und Wertebereich  $D(\arccos) = [-1, +1]$  und  $W(\arccos) = [0, \pi]$  (siehe Figuren 8,9). Der Funktionswert  $\arccos x$  ist derjenige Winkel zwischen 0 und  $\pi$ , dessen Cosinus  $x$  ist. Man hat also beispielsweise

$$\begin{aligned} \arccos 1 &= 0, \quad \arccos 0 = \pi/2, \quad \arccos(-1) = \pi, \\ \arccos(\sqrt{2}/2) &= \pi/4, \quad \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}, \end{aligned}$$

wie der Leser leicht einsieht.

**Arcus tangens** Die zu

$$f : x \rightarrow \tan x, \quad D(f) = (-\pi/2, +\pi/2)$$

inverse Funktion heisst arctan (“arcus tangens”). Dabei gilt  $D(\arctan) = (-\infty, +\infty)$  und  $W(\arctan) = (-\pi/2, +\pi/2)$  (siehe Figuren 10,11). Als Beispiel einer Eigenschaft dieser Funktion erwähnen wir Beziehung  $\cos(\arctan x) = 1/\sqrt{1+x^2}$ , die man leicht aus der Definition herleitet.

**Arcus cotangens** Die zu

$$f : x \rightarrow \cot x, \quad D(f) = (0, \pi)$$

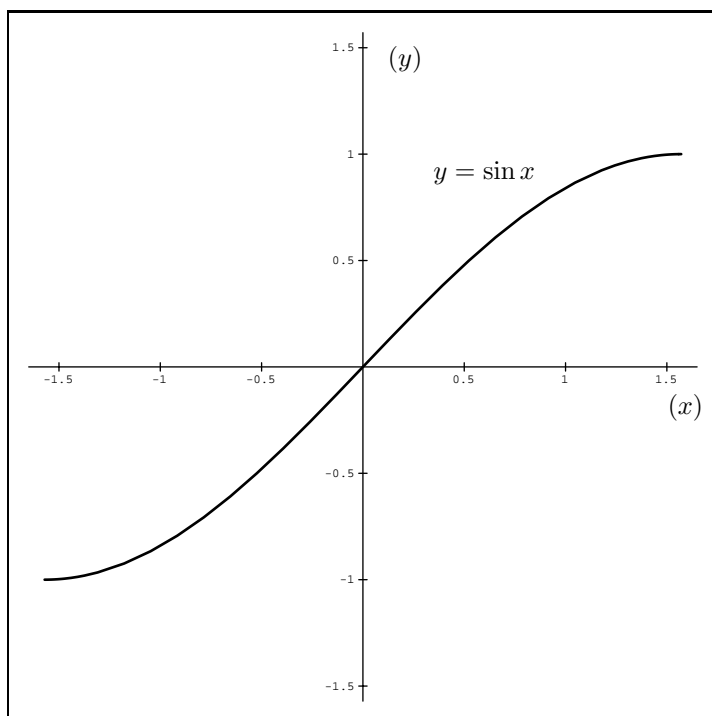


FIG. 6:

$$x \rightarrow \sin x, D(f) = [-\pi/2, +\pi/2]$$

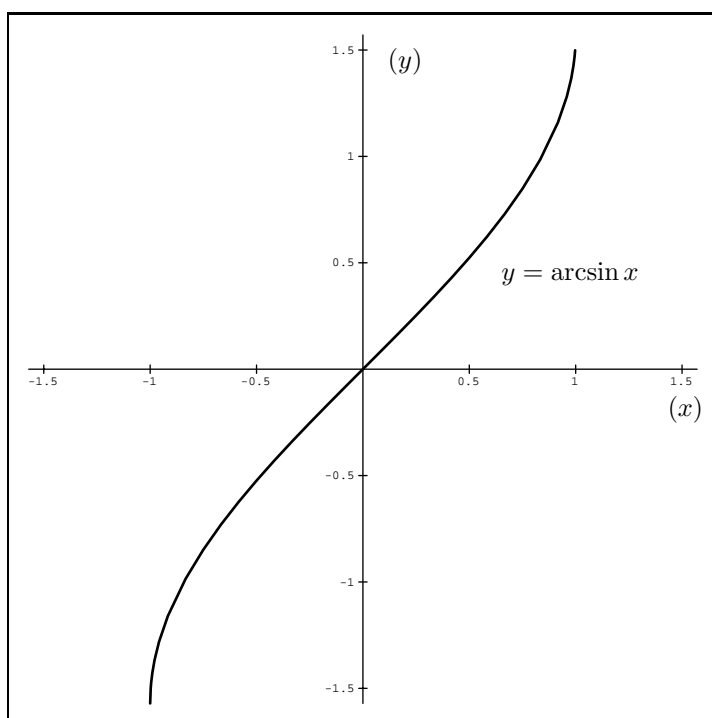


FIG. 7:

$$x \rightarrow \arcsin x$$



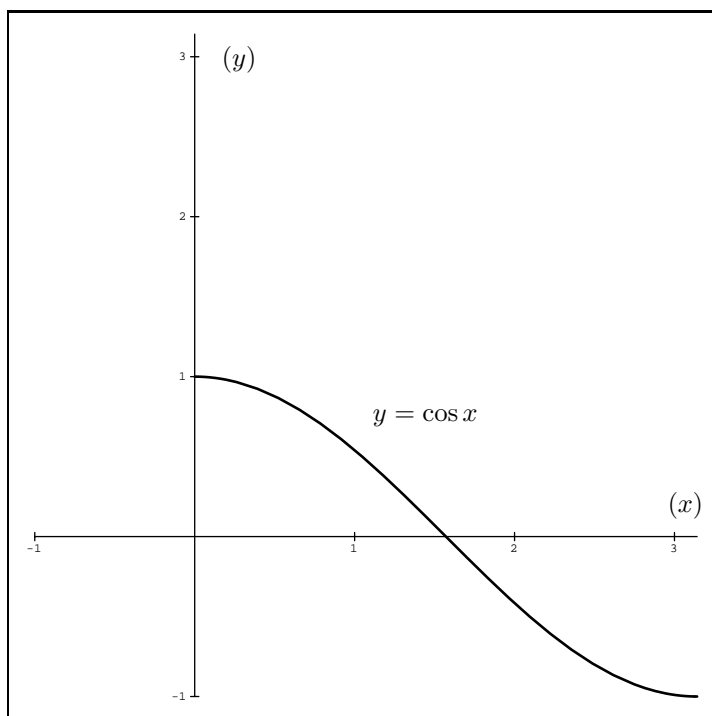


FIG. 8:

$$x \rightarrow \cos x, \quad D(f) = [0, \pi]$$

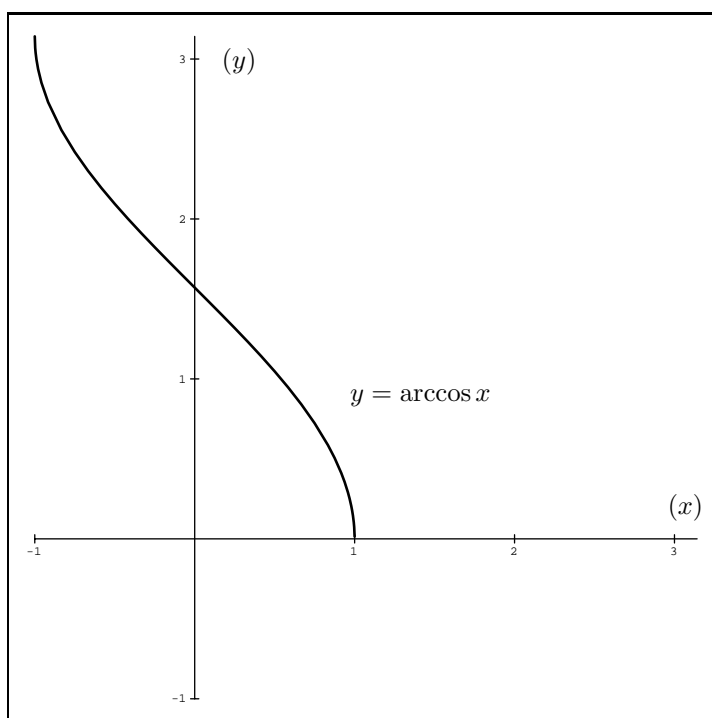


FIG. 9:

$$x \rightarrow \arccos x$$

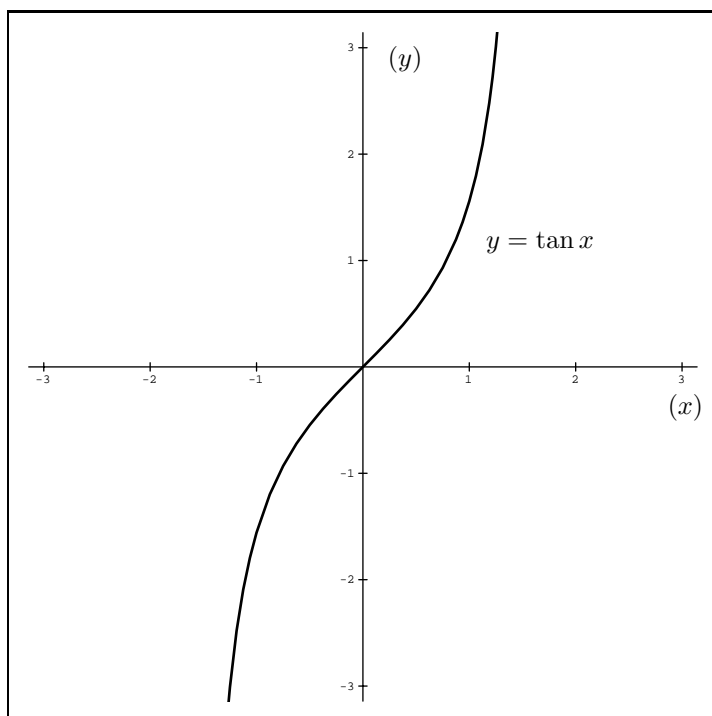


FIG. 10:

$$x \rightarrow \tan x,$$

$$D(f) = (-\pi/2, +\pi/2)$$

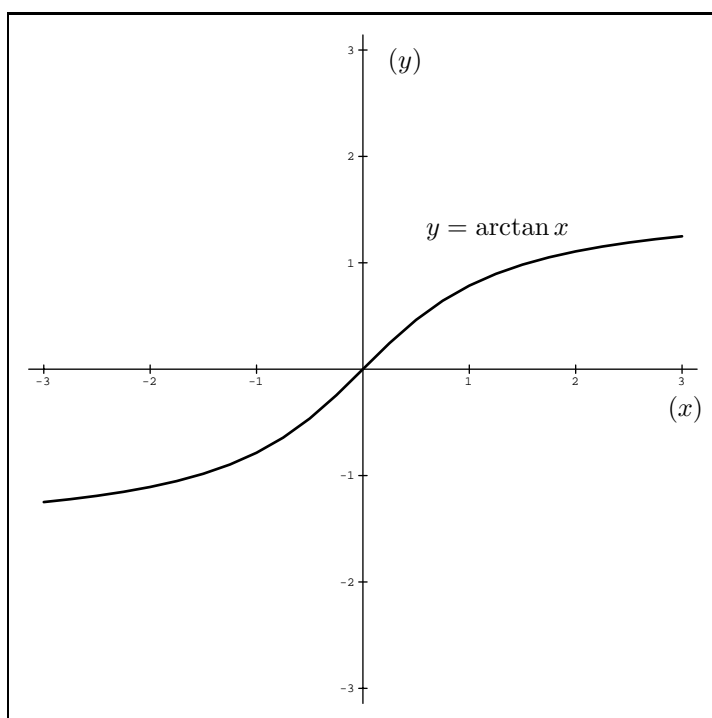


FIG. 11:

$$x \rightarrow \arctan x$$

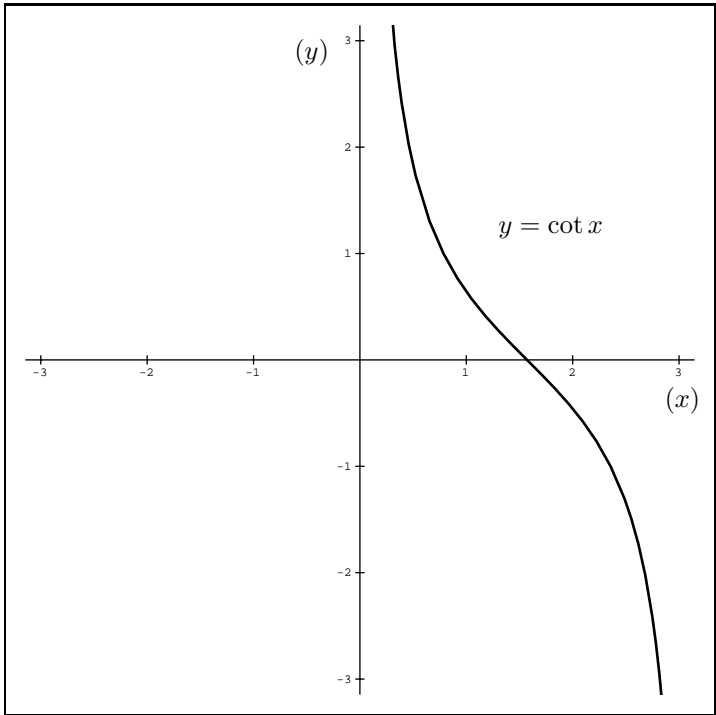


FIG. 12:

$$x \rightarrow \cot x, \quad D(f) = (0, \pi)$$

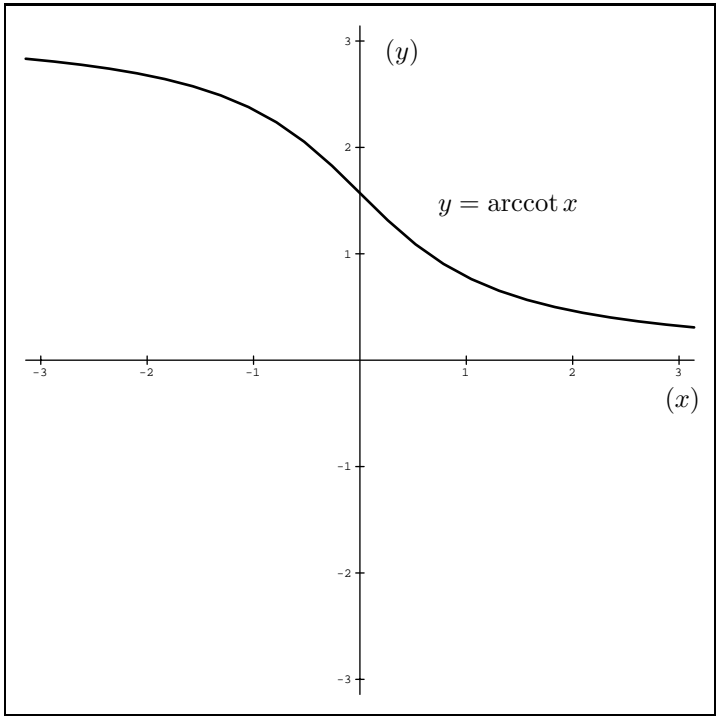


FIG. 13:

$$x \rightarrow \operatorname{arccot} x$$

inverse Funktion heisst  $\operatorname{arccot}$  (“arcus cotangens”). Dabei gilt  $D(\operatorname{arccot}) = (-\infty, +\infty)$  und  $W(\operatorname{arccot}) = (0, \pi)$  (siehe Figuren 12,13).

Dass die Einschränkungen bei den trigonometrischen Funktionen gerade auf die hier angegebene Art erfolgen, ist natürlich willkürlich; sie haben sich aber in der Literatur weitgehend durchgesetzt. Andere sind selbstverständlich ebenfalls denkbar.

Wir beschliessen den Abschnitt, mit dem folgenden Anwendungsbeispiel, welches zeigt, dass die arcus-Funktionen auf natürliche Weise auftreten.

**Beispiel** Man berechne die Länge  $l$  des Kreisbogens aus den Grössen  $x$  und  $a$  (siehe Figur 14).

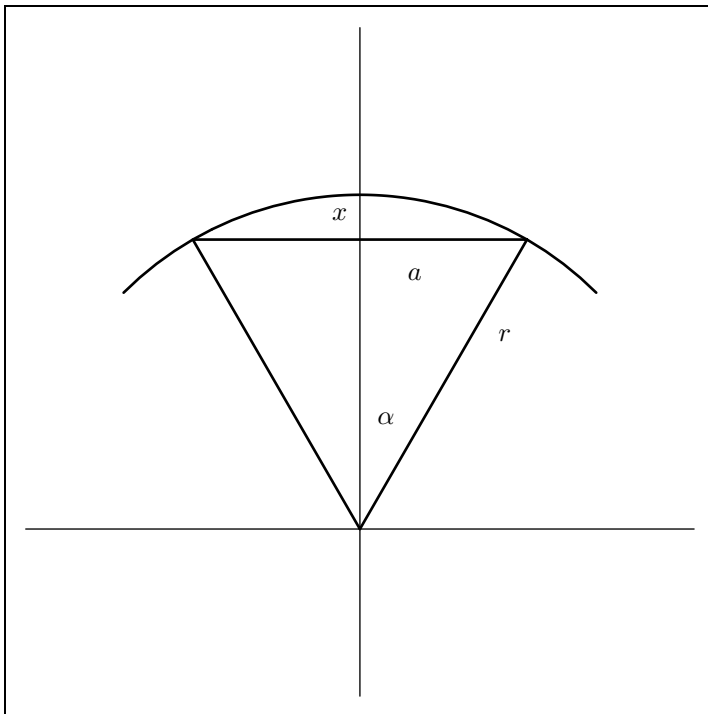


FIG. 14:  
Kreisbogen

Ist  $r$  der Radius des Kreisbogens, so liefert die Figur 14 sofort die folgende Beziehung

$$(r - x)^2 + a^2 = r^2 .$$

Daraus ergibt sich

$$r = \frac{a^2 + x^2}{2x} .$$

Ferner gilt

$$\sin \alpha = \frac{a}{r} ,$$

woraus man

$$\alpha = \arcsin \left( \frac{2ax}{a^2 + x^2} \right)$$

und schliesslich

$$l = 2 \cdot \left( \frac{a^2 + x^2}{2x} \right) \cdot \arcsin \left( \frac{2ax}{a^2 + x^2} \right)$$

erhält.