

3 Grenzwerte von Funktionen, Stetigkeit

Wir beginnen diesen Abschnitt mit einem numerischen Experiment. Es sei die Funktion

$$f : x \rightarrow \sin\left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x - 2}\right)$$

gegeben. Wir stellen uns vor, dass innerhalb einer längeren Rechnung der Funktionswert von f bestimmt werden soll, und zwar für Werte von x , die ihrerseits aus Messungen errechnet worden sind und deshalb nur näherungsweise bekannt sind. Immerhin wollen wir annehmen, dass der Wert von x mit zusätzlichem Aufwand beliebig genau gemacht werden kann. Zur Demonstration wollen wir die Funktion f zuerst an den Stellen

$$3.9, 3.99, 3.999, 3.9999, 3.99999, \dots$$

auswerten, also auf einer Folge von Zahlen, die sehr rasch gegen den als genau angesehenen Wert 4 konvergiert. Diese Folge von Zahlen deutet also die sukzessiv immer besser werdende Genauigkeit für die Grösse x an.

Ferner führen wir die gleiche Rechnung für die Folge von Zahlen

$$1.9, 1.99, 1.999, 1.9999, 1.99999, \dots$$

durch, welche gegen den Wert 2 konvergiert. Die Berechnung liefert folgende Werte:

x	$f(x)$		x	$f(x)$
3.9	0.8313595846		1.9	0.4413721770
3.99	0.8603029298		1.99	0.0330343010
3.999	0.8629213180		1.999	-0.9823680634
3.9999	0.8631805876		1.9999	-0.1634533406
3.99999	0.8632064890		1.99999	-0.0748074451
3.999999	0.8632090789		1.999999	-0.6256837105
3.9999999	0.8632093379		1.9999999	-0.9457588989
3.99999999	0.8632093638		1.99999999	-0.9997768755
3.999999999	0.8632093664		1.999999999	0.9978731823

Wir entnehmen dieser Tabelle, dass das Verhalten der Funktion f in der Nähe der beiden durch $x = 2$ und $x = 4$ gegebenen Punkte völlig verschieden ist. Während für $x = 4$ die Werte $f(x)$ sich - wie eine weitere Rechnung bestätigt - sukzessive der Zahl $0.8632093666 \dots$ nähern, streuen sie für $x = 2$ "chaotisch" über einen weiten Bereich.

Wir wollen im Laufe dieses Abschnittes die Gründe für diesen Sachverhalt näher untersuchen. Zu diesem Zwecke führen wir als erstes den Begriff des **Grenzwertes von Funktionen** ein.

Wir betrachten eine Funktion f , deren Definitionsbereich das Intervall (c, ξ) , $c < \xi$ umfasst, und ausserdem Folgen x_1, x_2, \dots von reellen Zahlen x_i mit $c < x_i < \xi$, welche gegen ξ konvergieren, $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = \xi$. Offensichtlich gibt es unendlich viele solcher Folgen; eine davon ist immer durch die unendliche Dezimalbruchentwicklung von ξ gegeben. Zu jeder solchen Folge bilden wir die zugehörige Folge der Funktionswerte

$$f(x_1), f(x_2), \dots$$

Diese kann - je nach Sachlage - konvergieren oder divergieren. Am interessantesten ist natürlich der Fall, wo sie nicht nur konvergiert, sondern auch für jede der oben beschriebenen Zahlfolgen x_1, x_2, \dots denselben Grenzwert a liefert. Dieser Wert a heisst dann definitionsgemäss der *linke Grenzwert der Funktion f an der Stelle ξ* ; in Zeichen drücken wir dies durch

$$a = \lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x) \text{ oder } f(x) \rightarrow a \text{ für } x \rightarrow \xi^-$$

aus. Dabei deutet das Minuszeichen beim Buchstaben ξ an, von welcher Seite die Folge x_1, x_2, \dots gegen ξ konvergieren soll.

Anzumerken sind hier die folgenden Dinge.

(1) Für gewisse Funktionen und für gewisse Werte von ξ kann es durchaus vorkommen, dass für die eine Zahlenfolge x_1, x_2, \dots der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ existiert, während für eine andere Zahlenfolge x'_1, x'_2, \dots der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n)$ *nicht* existiert, oder es kann vorkommen, dass diese Grenzwerte zwar beide existieren, dass sie aber voneinander verschieden sind. Gemäss unserer Definition besitzt in diesem Fall die Funktion f in ξ *keinen* linken Grenzwert.

(2) Bei der Definition des linken Grenzwertes einer Funktion f an der Stelle ξ wurde nirgends vorausgesetzt, dass die Funktion an der Stelle ξ definiert ist. In der Tat hat der Funktionswert in ξ - falls er existiert - a priori *nichts* mit dem linken Grenzwert von f in ξ zu tun. Es kann allerdings vorkommen, dass die beiden Werte übereinstimmen; aber dann sagt dies etwas ganz Wesentliches über die Funktion an der Stelle ξ aus. Darauf kommen wir in Kürze zu sprechen.

Vorerst aber noch einmal zurück zu unserem Beispiel. Für $x = 4$ scheinen unsere Zahlen zu zeigen, dass für die gegen 4 konvergierende Folge

$$x_1 = 3.9; x_2 = 3.99, \dots$$

die Folge der Funktionswerte

$$f(x_1), f(x_2), \dots$$

gegen den Wert $0.8632093666 \dots$ strebt. Dies wird uns vom Computerexperiment suggeriert. In der Tat lässt sich mathematisch exakt beweisen, dass für *jede* von links gegen 4 konvergierende Folge die zugehörige Folge der Funktionswerte gegen einen festen Wert strebt. Der linke Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \sin \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x - 2} \right)$$

existiert also, und er beträgt näherungsweise $0.8632093666 \dots$. Deutlich muss an dieser Stelle gesagt werden, dass das Computerexperiment diese Tatsache nur suggeriert, zum *Beweis* der

Tatsache aber *nichts* beiträgt, und auch nichts beitragen kann, denn mit Hilfe des Computers lassen sich immer nur eine endliche Anzahl der unendlich vielen Folgen x_1, x_2, \dots untersuchen, von denen beim Begriff des linken Grenzwertes die Rede ist.

Vollkommen anders als im Punkte $x = 4$ verhält sich unsere Funktion im Punkte $x = 2$. Hier scheinen unsere Zahlen zu sagen, dass für die gewählte, gegen 2 konvergierende Folge

$$x_1 = 1.9, x_2 = 1.99, \dots$$

die zugehörige Folge der Funktionswerte

$$f(x_1), f(x_2), \dots$$

divergiert, dass also der linke Grenzwert von f an der Stelle $\xi = 2$ *nicht* existiert. Dies suggeriert der Computer. In der Tat kann man mathematisch exakt nachweisen, dass

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \sin \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x - 2} \right)$$

nicht existiert. Auch hier muss gesagt werden, dass das Computerexperiment diese Tatsache zwar suggeriert, dass es aber *nichts* zum mathematischen Beweis beitragen kann, denn die Divergenz einer Folge lässt sich mit endlich vielen Computerwerten nicht beweisen.

Wir haben bis anhin immer vom linken Grenzwert gesprochen. Es ist aber klar, dass auf analoge Weise ein *rechter* Grenzwert definiert werden kann. Wir betrachten eine Funktion f , deren Definitionsbereich das Intervall (ξ, d) einschliesst, $\xi < d$. Wenn nun für jede von *rechts* gegen ξ konvergierende Folge x_1, x_2, \dots die Folge der Funktionswerte $f(x_1), f(x_2), \dots$ gegen den Wert b konvergiert, so heisst b der *rechte Grenzwert von f an der Stelle ξ* ,

$$b = \lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x) \text{ oder } f(x) \rightarrow b \text{ für } x \rightarrow \xi^+.$$

Beispiel Gegeben ist die Funktion $x \rightarrow 2^{-1/x}$ (siehe Figur 1). Diese Funktion ist für $x = 0$ nicht definiert. Wir wollen die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{-1/x}, \lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{-1/x}$$

berechnen. Für den rechten Grenzwert betrachten wir eine beliebige Folge x_1, x_2, \dots von positiven Zahlen, die gegen 0 konvergiert. Die reziproken Werte $1/x_1, 1/x_2, \dots$ werden mit wachsendem Index beliebig gross. Betrachtet man also die Folge $2^{-1/x_1}, 2^{-1/x_2}, \dots$, so konvergiert diese offensichtlich gegen 0. Damit gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{-1/x} = 0.$$

Um den linken Grenzwert zu diskutieren, betrachten wir eine beliebige Folge x_1, x_2, \dots , von negativen Zahlen, die gegen 0 konvergiert. Die reziproken Werte $1/x_1, 1/x_2, \dots$ werden mit

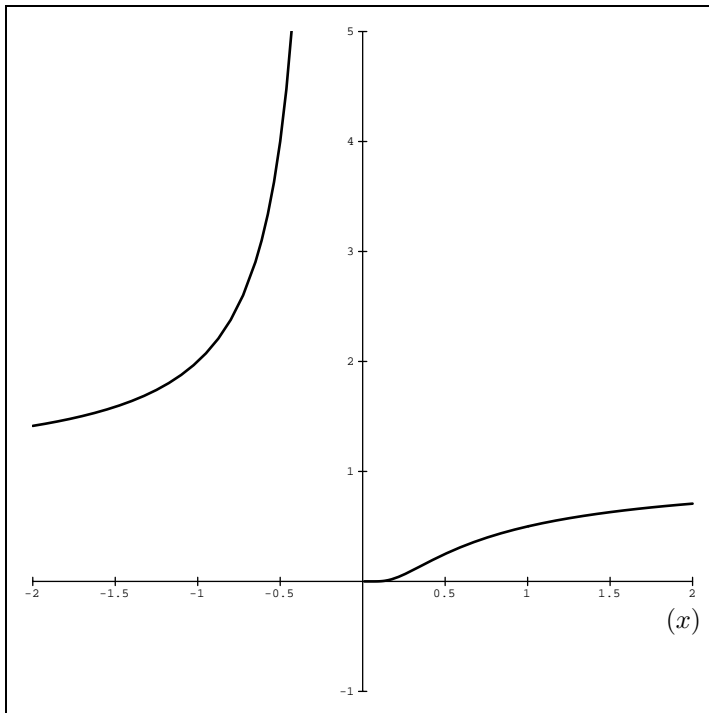


FIG. 1:
Die Funktion $x \rightarrow 2^{-1/x}$

wachsendem Index immer kleiner (“sie streben gegen $-\infty$ ”). Die Folge $-1/x_1, -1/x_2, \dots$ “strebt gegen $+\infty$ ”, und somit ebenfalls die Folge

$$2^{-1/x_1}, 2^{-1/x_2}, \dots$$

In unserer Terminologie bedeutet dies, dass die Folge *nicht* konvergiert; der linke Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{-1/x}$$

existiert *nicht*.

Beispiel Ein berühmter und für die Ableitung der trigonometrischen Funktionen wichtiger Grenzwert ist

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x}.$$

Diesen wollen wir als nächstes berechnen. Wir stellen zuerst fest, dass die Funktion

$$x \rightarrow \frac{\sin x}{x}$$

für $x = 0$ *nicht* definiert ist und dass die Funktion gerade ist, denn es gilt

$$\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}.$$

Wenn also der *rechte* Grenzwert dieser Funktion an der Stelle $x = 0$ existiert, so wird auch der *linke* Grenzwert an dieser Stelle existieren und mit jenem übereinstimmen. Unter der Voraussetzung, dass einer dieser Grenzwerte existiert, wird also gelten

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x}.$$

Wir beschränken uns auf die Berechnung des rechten Grenzwertes und entnehmen der Figur 2, dass für $0 < x < \pi/2$ die Ungleichung

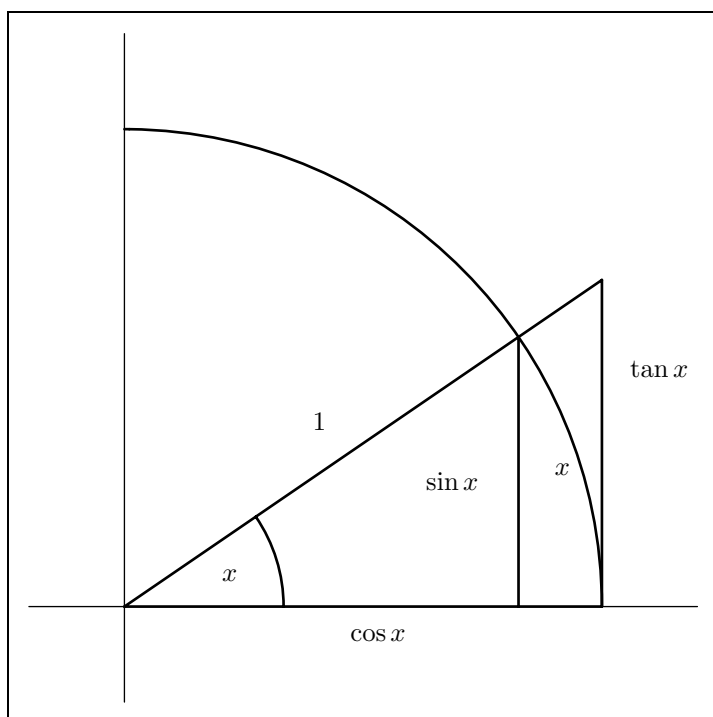


FIG. 2:
Zur Berechnung des
Grenzwertes

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x}$$

$$\frac{\sin x \cdot \cos x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2} = \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos x}$$

gilt. Daraus erhält man weiter

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Lässt man nun die Grösse x eine Folge von positiven Zahlen x_1, x_2, \dots durchlaufen, welche gegen 0 konvergiert, so konvergieren die Folgen

$$\cos x_1, \cos x_2, \dots$$

$$\frac{1}{\cos x_1}, \frac{1}{\cos x_2}, \dots$$

offensichtlich beide gegen 1. Damit muss gezwungenermassen auch die Folge

$$\frac{\sin x_1}{x_1}, \frac{\sin x_2}{x_2}, \dots$$

gegen 1 konvergieren. Es gilt also

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Die Rechenregeln, welche wir für den Umgang mit Grenzwerten von Folgen kennen gelernt haben, liefern auf offensichtliche Weise analoge **Rechenregeln für Grenzwerte** von Funktionen. Wir formulieren diese Regeln für rechte Grenzwerte:

Aus

$$\lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow \xi^+} g(x) = b$$

folgt

$$\lim_{x \rightarrow \xi^+} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b,$$

$$\lim_{x \rightarrow \xi^+} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b,$$

$$\lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x)/g(x) = a/b.$$

Letzteres natürlich nur, falls im betrachteten Intervall $b \neq 0$ und $g(x) \neq 0$.

Beispiel

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Ausserdem gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\tan x}{x},$$

da $x \rightarrow (\tan x)/x$ eine gerade Funktion ist.

Beispiel

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + \cos x} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}.$$

Ausserdem gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)},$$

denn die Funktion

$$x \rightarrow \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)}$$

ist gerade.

Beispiel

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \cdot \frac{\sin x^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} = 0 \cdot 1 = 0$$

In allen Beispielen, die wir bis anhin betrachtet haben, ist die Funktion im Punkte ξ , in dem der Grenzwert berechnet werden soll, nicht definiert. Ist er aber definiert, so stellt sich die oben schon erwähnte Frage, was die Beziehung dieses Wertes $f(\xi)$ zu den beiden Grenzwerten

$$\lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x)$$

ist. Es ist leicht zu sehen, dass im *allgemeinen* zwischen diesen drei Werten keine Beziehung besteht. Betrachten wir zur Illustration ausgehend vom weiter oben betrachteten Beispiel die auf ganz \mathbb{R} definierte Funktion

$$g : x \rightarrow \begin{cases} 2^{-1/x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

An der durch $\xi = 0$ gegebenen Stelle gilt dann

$$g(0) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \xi^-} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \xi^+} g(x) = 0.$$

Keine irgendwie geartete Beziehung zwischen diesen Werten ist auszumachen; sie sind offenbar im *allgemeinen* völlig unabhängig voneinander. Andererseits zeigt sich, dass die drei Werte in vielen Fällen – man könnte sogar sagen “üblicherweise” – übereinstimmen. Betrachten wir etwa die oben definierte Funktion an der Stelle $\xi = 1$, so gilt offensichtlich

$$g(1) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \frac{1}{2}.$$

Die Tatsache, dass die drei Werte “üblicherweise” übereinstimmen, wird in vielen Fällen implizit benutzt. Wertet man etwa die Funktion $h : x \rightarrow x^2$ an der Stelle $\xi = \pi$ aus, so geschieht dies ja dadurch, dass man in der Rechnung die durch einen unendlichen Dezimalbruch beschriebene Irrationalzahl π durch einen endlichen Dezimalbruch approximiert und dabei je nach verlangter Genauigkeit mehr oder weniger Stellen berücksichtigt. In der hier eingeführten Sprache berechnet man die Funktion $h : x \rightarrow x^2$ auf der durch die endlichen Dezimalbrüche gegebenen und gegen π konvergierenden Folge

$$3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159, \dots$$

und nimmt stillschweigend an, dass der Wert $h(\pi) = \pi^2$ durch den Grenzwert der Folge

$$h(3), h(3.1), h(3.14), h(3.141), h(3.1415), h(3.14159), \dots$$

gegeben ist. Man macht hier offenbar implizit Gebrauch von der Beziehung

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} h(x) = h(\pi).$$

Dieses Vorgehen ist gestattet, weil die Funktion $h : x \rightarrow x^2$ an der Stelle $\xi = \pi$, ja sogar überall eine Eigenschaft besitzt, die im vorhergehenden Beispiel für die Funktion g an der Stelle $\xi = 0$ *nicht* gegeben war. Diese Eigenschaft nennt der Mathematiker **Stetigkeit**. Er definiert sie wie folgt.

Definition Die Funktion $f : x \rightarrow f(x)$ sei auf dem Intervall (c, d) mit $c < \xi < d$ definiert. Gilt

$$\lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x) = f(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x),$$

so heisst die Funktion f *stetig im Punkte* ξ . Eine Funktion heisst *stetig* schlechthin, falls sie in allen Punkten ihres Definitionsbereiches stetig ist.

Der Nachweis, dass eine gegebene Funktion stetig ist, ist eine auch für einen Mathematiker mühevoll Arbeit, wenn wirklich alle Einzelheiten nachgeprüft werden sollen. Glücklicherweise lässt sich aber das wesentliche Resultat dieser Bemühungen auf konzise Art ausdrücken.

Satz *Sämtliche elementare Funktionen und die aus ihnen durch Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und Zusammensetzung gebildeten Funktionen sind in ihrem Definitionsbereich stetig.*

Beispiel Die Funktion $f : x \rightarrow x/(x-2)$ ist stetig, d.h. f ist stetig in allen Punkten des Definitionsbereiches. (Der Leser beachte die Sprachregelung: im Punkte $x = 2$ ist f *nicht* definiert!)

Zur Notation machen wir noch folgende Bemerkung: Wenn an der Stelle ξ der linke und der rechte Grenzwert einer Funktion $f : x \rightarrow f(x)$ übereinstimmen, wenn also

$$\lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x)$$

gilt, so erlaubt man sich oft, kurz vom *Grenzwert der Funktion f an der Stelle ξ* zu sprechen. Man verwendet dann konsequenterweise das Symbol

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) .$$

Dadurch drückt man aus, dass die Approximation des Wertes ξ von links und von rechts das gleiche Resultat liefert. Man beachte, dass dies bei stetigen Funktionen immer der Fall ist.

Die in diesem Abschnitt besprochenen Beispiele machen klar, dass die Berechnung eines Funktionswertes an einer nur approximativ bekannten Stelle ξ nur dann zu einem sinnvollen Resultat führen kann, wenn die Funktion an der Stelle ξ *stetig* ist. Damit man überhaupt mit einer Funktion in der Praxis rechnen kann, ist die Stetigkeit sozusagen eine Minimalvoraussetzung. Anschaulich ausgedrückt besagt sie, dass $f(\xi)$ sich beliebig genau berechnen lässt, wenn nur ξ genügend gut approximiert wird. Diese nur qualitative Aussage genügt in Anwendungen allerdings oft nicht. Wenn man etwa die folgende naheliegende Frage beantworten will, so braucht man zusätzliche Informationen quantitativer Art.

Wie genau muss ξ bekannt sein, damit $f(\xi)$ mit vorgeschriebener Genauigkeit, z.B. auf 5 Stellen nach dem Komma berechnet werden kann?

Um diese Frage zu beantworten zu können, müssen neben der Stetigkeit weitere und stärkere Eigenschaften der Funktion f bekannt sein; Stetigkeit allein genügt nicht. Wir werden später sehen, wie zum Beispiel die Differenzierbarkeit von f zur Beantwortung dieser Frage herangezogen werden kann.