

2 Funktionen

Eine **Funktion** oder **Abbildung** von der Menge A in die Menge B , $f : A \rightarrow B$, ist eine Vorschrift, die für jedes Element $x \in A$ ein Element $f(x) \in B$ festlegt, $f : x \rightarrow f(x)$.

$f(x)$ heisst *Funktionswert* von f an der Stelle x oder *Bild* von x unter f .

A heisst *Definitionsbereich* $D(f)$ von f (englisch: domain), B heisst *Zielbereich* von f (englisch: range), $W(f) = \{f(x) | x \in D(f)\}$ heisst *Wertebereich* von f .

Es handelt sich beim Begriff der Funktion um einen der ganz zentralen Begriffe der Mathematik. Er hat eine lange historische Entwicklung durchgemacht; erst in neuester Zeit hat er den obigen sehr genau bestimmten Inhalt erhalten. Der Leser tut gut daran, sich mit diesem Begriff eingehend auseinanderzusetzen. Eine etwas anschaulichere Beschreibung des Funktionsbegriffs ist die folgende.

Eine Funktion $f : A \rightarrow B$ ist ein “schwarzer Kasten”, der als Input nur Elemente von A annimmt, und für jedes $x \in A$ den Output $f(x) \in B$ liefert. Konkret (aber wegen der beschränkten Rechengenauigkeit nur annäherungsweise) kann man etwa einen Taschenrechner mit der Taste \log als Funktion $f : x \rightarrow \log x$ ansehen.

Der Begriff der Funktion ist sehr allgemein, über die Natur der Elemente von A und B zum Beispiel wird überhaupt nichts vorausgesetzt. Zuerst betrachten wir nun Beispiele von Funktionen, welche auf einem Teilbereich der reellen Zahlen definiert sind und welche reelle Zahlen als Werte annehmen, also *reellwertige Funktionen einer reellen Variablen*. Zu jeder solchen Funktion f gehört ihr *Graph* $\Gamma(f)$, nämlich die Menge der Punkte $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $x \in D(f), y = f(x)$

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \in D(f), y = f(x)\}.$$

Beispiel Die Sinusfunktion

$$f : x \rightarrow \sin x; \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad D(f) = \mathbb{R}, \quad W(f) = [-1, +1].$$

Man beachte $W(f) \neq B$; im allgemeinen können Zielbereich und Wertebereich verschieden sein.

Beispiel $f : x \rightarrow \sqrt{x-1}$; $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $D(f) = [1, \infty)$; $W(f) = [0, \infty)$.

Bei Funktionen, wie sie in Anwendungsbeispielen auftreten, ist der Graph üblicherweise eine Kurve; es lassen sich aber durchaus kompliziertere Funktionen denken, deren Graph in keinem vernünftigen Sinn als Kurve aufgefasst werden kann.

Beispiel Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch die folgende Vorschrift gegeben:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \text{ rational ist,} \\ 0, & \text{falls } x \text{ irrational ist.} \end{cases}$$

Es gilt also insbesondere $f(1/2) = 1$ und $f(\sqrt{2}) = 0$. Der Graph dieser Funktion ist keine Kurve im anschaulichen Sinn.

Funktionen lassen sich auf sehr viele verschiedene Arten definieren, beschreiben und anschaulich machen. Auf einige der wichtigsten Arten gehen wir im Folgenden ein.

(i) **Wertetabelle**

Ist $D(f)$ eine endliche Menge, so kann f durch eine Wertetabelle beschrieben werden; ist z.B. $D(f) = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$, so genügt es $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_N)$ aufzuführen:

x	x_0	x_1	x_2	\dots	x_N
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	\dots	$f(x_N)$

Wenn $D(f)$ eine unendliche Menge ist, so ist f natürlich durch die Angabe von endlich vielen Werten noch nicht bestimmt. Jede reelle Zahlfolge kann als eine auf der Menge der natürlichen Zahlen definierte Funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

x	1	2	3	4	\dots
$f(x)$	a_1	a_2	a_3	a_4	\dots

angesehen werden. Sie wird durch das Bildungsgesetz der Folge bestimmt, z.B.

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{c}{a_n} \right), \quad n \geq 1.$$

(ii) **Explizite Darstellung, Formel**

Eine Funktion f kann durch eine Rechenvorschrift beschrieben werden, welche es erlaubt, zu gegebenem x den Wert $f(x)$ zu bestimmen

$$f: x \rightarrow \frac{x^2 + 5x + 4}{x^4 - 16}$$

In einem solchen Fall wird, falls nichts anderes angegeben ist, für $D(f)$ immer der grösstmögliche Bereich genommen, für den die angegebene Formel sinnvoll ist. Die Rechenvorschrift kann beliebig kompliziert sein. Als Beispiele erwähnen wir eine "Sprungfunktion" (siehe Figur 1)

$$f: x \rightarrow f(x) = \begin{cases} -1, & \text{für } x < 0 \\ 0, & \text{für } x = 0 \\ 1, & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

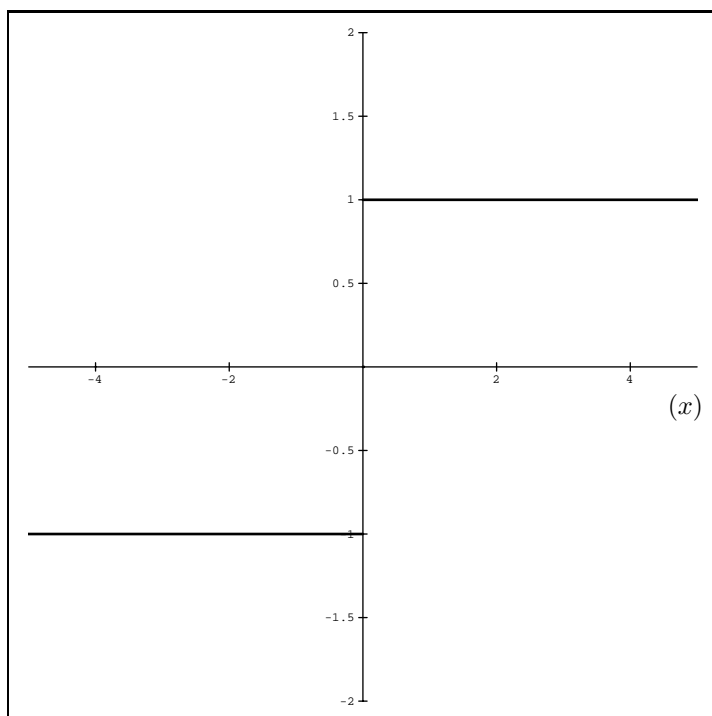


FIG. 1:
Sprungfunktion

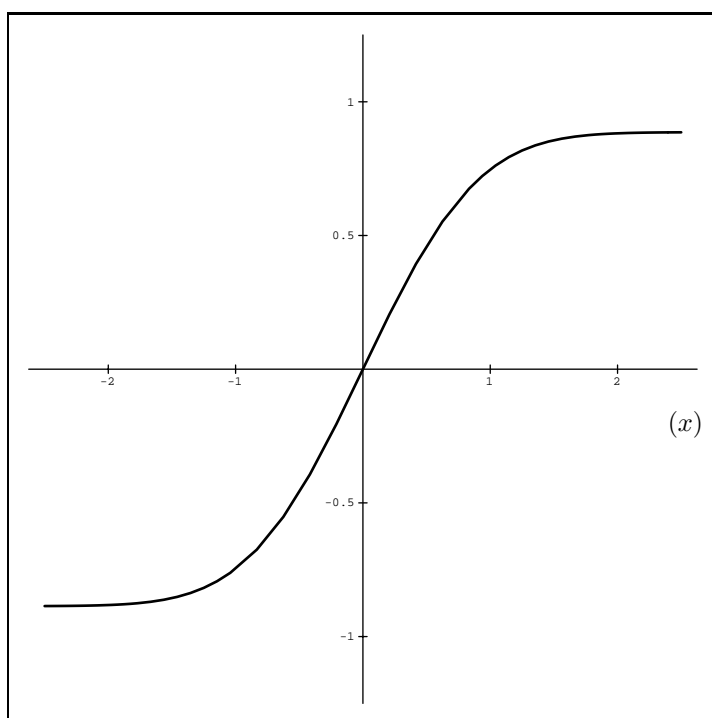


FIG. 2:
Gauss'sche Fehlerfunktion

und die Gauss'sche Fehlerfunktion (siehe Figur 2)

$$f : x \rightarrow f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt .$$

Der Leser mache sich an dieser Stelle den Unterschied zwischen den Begriffen "Formel" und "Funktion" klar: nicht jede Funktion ist durch eine Formel gegeben!

(iii) **Differentialgleichung**

In den Naturwissenschaften werden Funktionen sehr oft durch Differentialgleichungen bestimmt. Als Beispiel sei der freie Fall eines Massenpunktes erwähnt. Die Differentialgleichung lautet bekanntlich

$$\ddot{y}(t) = -g,$$

wo g die Erdbeschleunigung bezeichnet. Daraus erhält man

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + At + B,$$

wo A und B Konstanten sind. Die Differentialgleichung hat unendlich viele Lösungen. Die (Integrations-)Konstanten werden durch weitere Angaben, üblicherweise durch die sogenannten Anfangsbedingungen (Ort und Geschwindigkeit des Massenpunktes zur Zeit 0) bestimmt.

Im Rest dieses Abschnittes wollen wir noch einige Beispiele von Funktionen kennen lernen, welche etwas allgemeinerer Art sind, und dabei gleich Situationen beschreiben, in denen solche Funktionen auf natürliche Weise auftreten.

Beispiel $f : A \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, A ein Teilbereich der reellen Zahlen. Solche Funktionen treten z.B. bei Parameterdarstellungen ebener Kurven auf.

(1) $t \rightarrow (a \cos t, a \sin t)$, $A = \mathbb{R}$

Diese Funktion beschreibt einen Kreis mit Radius a , der mit Startpunkt $(a, 0)$ gleichförmig im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird.

(2) $t \rightarrow (a \cos t, b \sin t)$, $A = \mathbb{R}$

Es gilt $x(t)^2/a^2 + y(t)^2/b^2 = 1$. Die Funktion beschreibt folglich eine Ellipse mit Halbachsen a und b und Mittelpunkt $(0, 0)$.

Beispiel $f : A \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, A ein Teilbereich der reellen Zahlen,

$$f : t \rightarrow (x(t), y(t), z(t)).$$

Eine solche Funktion beschreibt eine Kurve im 3-dimensionalen Raum.

(1)

$$f : t \rightarrow \begin{cases} x(t) = a_1 + tn_1 \\ y(t) = a_2 + tn_2 \\ z(t) = a_3 + tn_3 \end{cases}, \quad D(f) = \mathbb{R}$$

stellt eine Gerade durch den Punkt P , $P = (a_1, a_2, a_3)$ in Richtung \vec{n} , $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ dar.

(2)

$$f : t \rightarrow (\cos t, \sin t, \frac{h}{2\pi} t), \quad D(f) = \mathbb{R}.$$

Diese Funktion beschreibt eine Rechts-Schraubenlinie mit Ganghöhe h auf einem Zylinder mit Radius 1 um die z -Achse.

Beispiel $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, A Teil der Ebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Der Funktionswert an der Stelle (x, y) ist eine reelle Zahl. Die Temperaturverteilung auf einem Blechstück der Form A wird zum Beispiel durch eine Funktion dieser Art beschrieben.

Beispiel Betrachten wir jetzt ein ganz konkretes Beispiel. Bei einer Eisenbahnlinie, welche einen Kreisbogen beschreibt, ist die Grösse a vorgegeben. Man bestimme den Kurvenradius r in Abhängigkeit von x (siehe Figur 3).

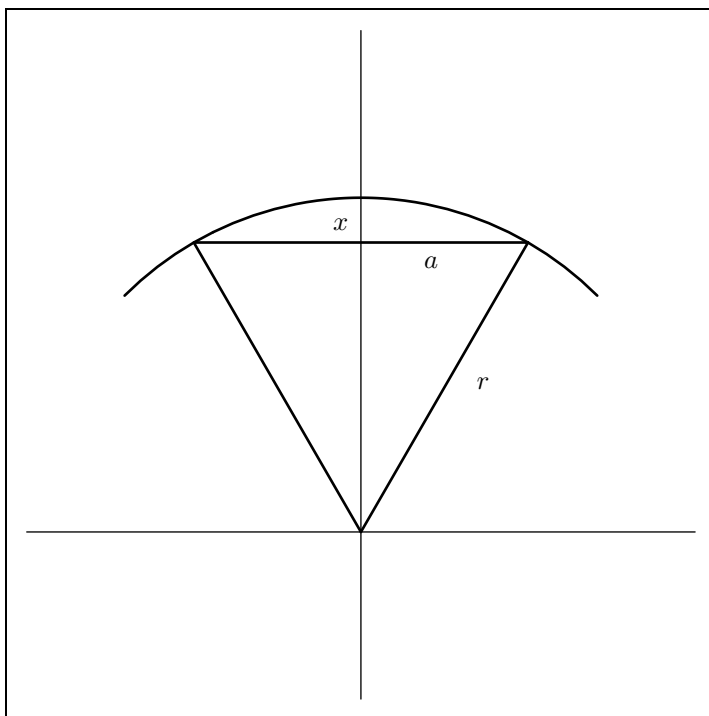


FIG. 3:
Kreisbogen mit Grössen r , a , x

Es gilt offensichtlich

$$a^2 + (r - x)^2 = r^2.$$

Daraus ergibt sich leicht

$$r = \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{x} + x \right).$$

Damit ist der Radius r in Abhängigkeit der Grösse x bestimmt. Mathematisch definiert dies eine Funktion

$$r : x \rightarrow r(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{x} + x \right).$$

Für die *Anwendung*, die man im Auge hat, ist nur der Definitionsbereich $D(r) = (0, a]$ von Interesse, obschon *mathematisch* die gefundene Formel auch für andere Werte von x sinnvoll ist, und deshalb der Definitionsbereich ausgedehnt werden kann.

Das Beispiel etwas variierend kann man den Radius r auch in Abhängigkeit der Grössen x und a betrachten. Dann beschreibt die obige Formel eine Funktion

$$\bar{r} : (a, x) \rightarrow \bar{r}(a, x) = \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{x} + x \right),$$

welche auf einem Teilbereich A der Ebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definiert ist und Werte in \mathbb{R} annimmt. Man hat also hier eine Funktion $\bar{r} : A \rightarrow \mathbb{R}$ vor sich, wie wir sie auch in einem der früheren Beispiele studiert haben, und dies in einem ganz anderen Zusammenhang.

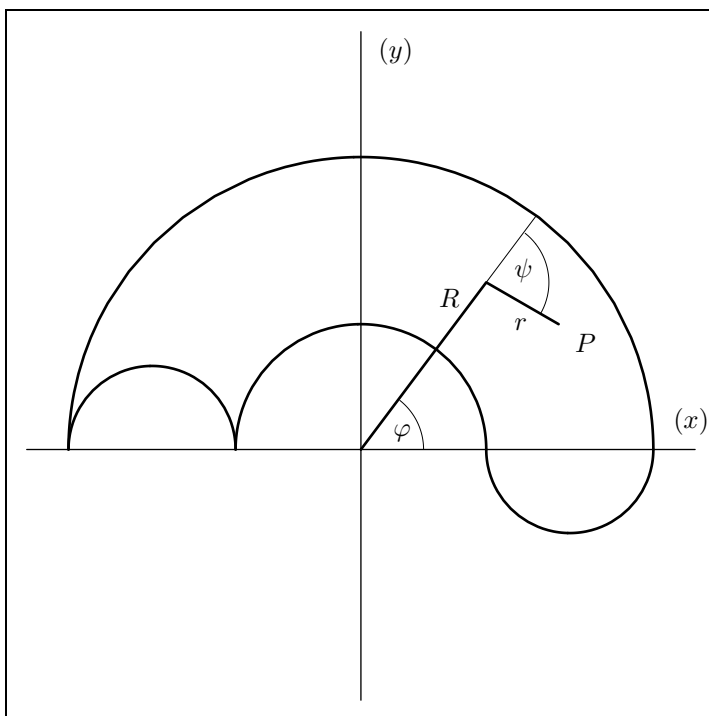


FIG. 4:
Roboterarm

Beispiel $f : A \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, A eine Teilmenge von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Eine Situation, wo eine Funktion dieser Art auf natürliche Art auftritt, ist wie folgt. Gegeben ist ein Roboterarm (siehe Figur 4), bei dem die Winkel φ und ψ unabhängig voneinander zwischen 0 und π variieren können. Jedes Paar (φ, ψ) legt einen Punkt P im Arbeitsbereich des Armes fest, nämlich

$$P = (R \cos \varphi + r \cos(\varphi - \psi), R \sin \varphi + r \sin(\varphi - \psi)).$$

Dadurch wird offenbar eine Funktion (=Abbildung!)

$$f : (\varphi, \psi) \rightarrow (R \cos \varphi + r \cos(\varphi - \psi), R \sin \varphi + r \sin(\varphi - \psi))$$

von einem Teilbereich A der (φ, ψ) -Ebene in die (x, y) -Ebene definiert. Der Teilbereich A ist dabei durch

$$A = \{(\varphi, \psi) | 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \psi \leq \pi\}$$

gegeben.

Zum Schluss dieses Abschnittes wollen wir uns mit einigen **grundlegenden Funktionen** beschäftigen; wir verstehen darunter Funktionen der Art

$$x \rightarrow x^n, x \rightarrow \sin x, x \rightarrow e^x, \text{etc.}$$

Diese Funktionen sind aus der Schule bereits bekannt, und wir können uns deshalb kurz fassen. Da sie aber die Bausteine für kompliziertere Funktionen bilden, ist es notwendig, ihre Eigenschaften gut zu kennen; insbesondere muss für jede dieser Funktionen über den Definitionsbereich, das globale Verhalten, die Symmetrieeigenschaften etc. Klarheit herrschen.

Es sei $f : x \rightarrow f(x)$ eine Funktion. Sie heisst *gerade*, wenn $D(f)$ symmetrisch zum Nullpunkt der x -Achse ist und wenn für alle $x \in D(f)$ gilt

$$f(-x) = f(x).$$

Die Funktion $f : x \rightarrow f(x)$ heisst *ungerade*, wenn $D(f)$ symmetrisch zum Nullpunkt der x -Achse ist und wenn für alle $x \in D(f)$ gilt

$$f(-x) = -f(x).$$

Die Funktion $f : x \rightarrow f(x)$ heisst (*strikt*) *monoton wachsend*, wenn aus $x_1 < x_2$ mit $x_1, x_2 \in D(f)$ stets folgt

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (\text{bzw. } f(x_1) < f(x_2)).$$

Die Funktion $f : x \rightarrow f(x)$ heisst (*strikt*) *monoton fallend*, wenn aus $x_1 < x_2$ mit $x_1, x_2 \in D(f)$ stets folgt

$$f(x_1) \geq f(x_2) \quad (\text{bzw. } f(x_1) > f(x_2)).$$

Die elementaren Funktionen sind die folgenden:

(i) **Potenzfunktion**

$$x \rightarrow x^n.$$

Man mache sich in den folgenden Fällen den Verlauf des Graphen klar: n ganz positiv, n ganz negativ, n rational (z.B. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots$), n beliebig reell. In welchen Fällen ist die Potenzfunktion gerade, ungerade, monoton wachsend oder fallend, etc?

(ii) **Polynome**

$$x \rightarrow a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

Die reellen Grössen a_0, a_1, \dots, a_n heissen die *Koeffizienten* des Polynoms, die ganze Zahl n heisst *Grad* des Polynoms, falls $a_n \neq 0$. Man studiere den typischen Verlauf solcher Funktionen, insbesondere untersuche man für kleine n , $n = 1, 2, 3$ den Einfluss der Koeffizienten.

(iii) **rationale Funktionen**

$$x \rightarrow \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m}.$$

Man werde sich klar über den Definitionsbereich solcher Funktionen und studiere den Verlauf an einigen ausgewählten Beispielen.

(iv) **trigonometrische Funktionen** sin, cos, tan, cot.

Man präge sich für jede dieser Funktionen die grundlegenden Eigenschaften (Symmetrie, Nullstellen, Periodizität, etc.) gut ein.

(v) **Exponentialfunktion**

$$x \rightarrow a^x, \quad a > 1.$$

(vi) **Logarithmusfunktion**

$$x \rightarrow {}^a \log x, \quad a > 1.$$

Auf Exponential- und Logarithmusfunktion werden wir später noch zurückkommen. Hier soll der typische Verlauf der Graphen kennengelernt und insbesondere der Einfluss der Grösse a studiert werden. Es soll auch klar werden, dass zwischen Exponentialfunktion und Potenzfunktion ein wesentlicher Unterschied besteht.

Anhang: Intervallbezeichnungen. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben. Dann definieren wir

$$\begin{aligned} (a, b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, \\ [a, b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} , \\ [a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} .\end{aligned}$$

An Stelle von $a, b \in \mathbb{R}$ lassen wir auch die Symbole $+\infty, -\infty$ zu, so dass zum Beispiel gilt

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < \infty\},$$

$$(-\infty, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}.$$

Natürlich dürfen die Symbole $+\infty, -\infty$ nur zusammen mit einer *runden* Klammer vorkommen.