

1 Folgen, Konvergenz

Eine **Folge von reellen Zahlen** ist eine Abbildung der natürlichen Zahlen $1, 2, \dots$ (oder auch $0, 1, 2, \dots$) in die reellen Zahlen. Für jede natürliche Zahl n ist somit eine reelle Zahl a_n festgelegt:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \rightarrow & a_1 \\ 2 & \rightarrow & a_2 \\ 3 & \rightarrow & a_3 \\ & \vdots & \\ n & \rightarrow & a_n \\ & \vdots & \end{array}$$

Die Folge wird oft kurz durch ihre Werte a_1, a_2, \dots beschrieben. Das Bildungsgesetz der Folge kann verschiedene Gestalt besitzen. In manchen Fällen ist das n -te Glied a_n durch eine geschlossene Formel gegeben.

Beispiel $a_n = -5 + 3n$, $n \geq 1$.

Sehr oft ist dies allerdings nicht der Fall. Für die Anwendung sehr wichtig sind die Folgen, wo die Glieder *rekursiv* bestimmt werden: a_1 ist gegeben; a_{n+1} lässt sich nach einer gegebenen Vorschrift aus a_1, a_2, \dots, a_n berechnen.

Beispiel Es sei $c > 0$ eine reelle Zahl. Die Folge

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{c}{a_n} \right), \quad n \geq 1,$$

ist rekursiv gegeben.

Der mathematische Begriff der Folge ist sowohl für die Theorie wie für die Anwendungen ganz fundamental. So bestehen Computerberechnungen zum Beispiel oft darin, rekursiv definierte Folgen zu erzeugen. Berechnet man mit Hilfe eines Taschenrechners die Quadratwurzel \sqrt{c} , so geschieht dies dadurch, dass die ersten Glieder einer Folge a_1, a_2, \dots bestimmt werden, deren Bildungsgesetz im Taschenrechner fest programmiert ist. Diese Folge hat die Eigenschaft, dass von einem bestimmten Index m an alle Glieder a_{m+k} , $k \geq 0$ in allen angezeigten Dezimalstellen mit dem Dezimalbruch von \sqrt{c} übereinstimmen, wobei die letzte angezeigte Stelle natürlich gerundet ist. Es werden dann mindestens die ersten m Glieder der Folge ausgerechnet. Dass die verwendete Folge diese Eigenschaft hat, folgt aus der Tatsache, dass sie “gegen \sqrt{c} konvergiert”. Den Begriff der *Konvergenz* werden wir in diesem Abschnitt genau definieren.

Zur Diskussion von Folgen ist es oft nützlich, die Glieder als Punkte in einem kartesischen Koordinatensystem aufzufassen; das Glied a_n wird als Punkt (n, a_n) dargestellt (siehe Figur 1).

Definitionen Eine Folge a_1, a_2, \dots heisst *beschränkt*, wenn ihr Bild ganz in einem endlich breiten, waagerechten Parallelstreifen enthalten ist.

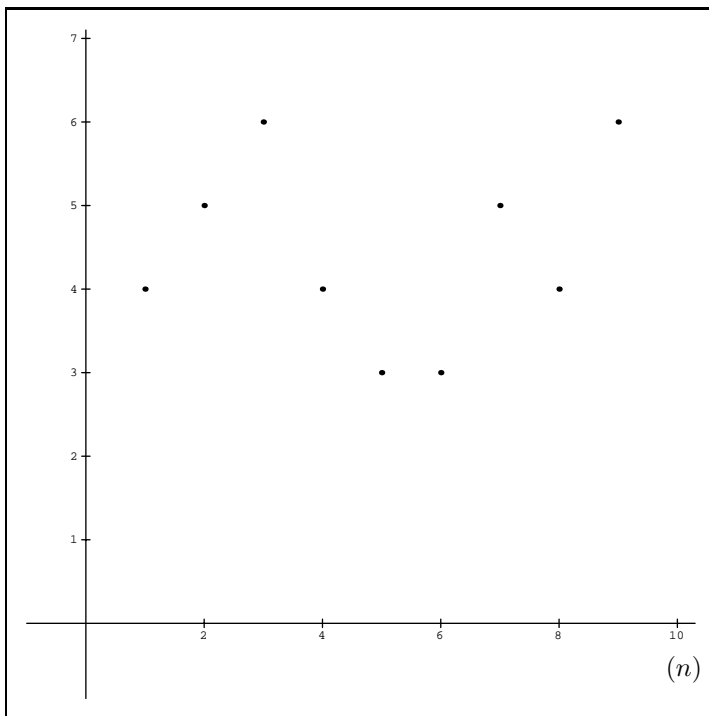


FIG. 1:
Zur Darstellung von Folgen

Eine Folge heisst (*strikt*) *monoton wachsend*, wenn für alle n gilt

$$a_{n+1} \geq a_n \text{ (bzw. } a_{n+1} > a_n \text{)} .$$

Die Folge a_1, a_2, \dots heisst *Nullfolge*, falls es zu jeder noch so kleinen Zahl $\epsilon > 0$ ein m gibt, so dass für alle Glieder a_{m+k} , $k \geq 0$ gilt

$$|a_{m+k}| < \epsilon .$$

Man sagt in diesem Fall, die Folge **konvergiere** gegen Null oder **strebe** gegen Null. In Zeichen drückt man dies durch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

oder durch

$$a_n \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

aus. Das geometrische Bild einer Nullfolge hat die Eigenschaft, dass in jedem noch so schmalen Parallelstreifen mit der x -Achse als Mittellinie alle Glieder der Folge mit Ausnahme von endlich vielen liegen.

Beispiel Die Folge gegeben durch $a_n = 1/n$, $n \geq 1$ ist offensichtlich eine Nullfolge (siehe Figur 2).

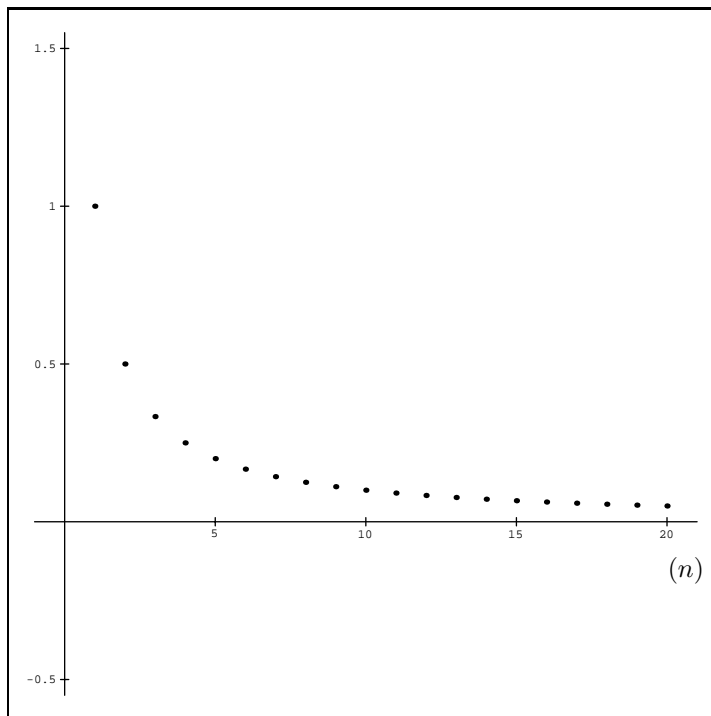


FIG. 2:
Die Folge $1/n$

Beispiel Die Folge gegeben durch

$$a_n = \frac{1}{2} + (-1)^n \frac{1}{n^2}$$

ist offenbar beschränkt (siehe Figur 3). Sie hat zusätzlich die Eigenschaft, dass in jedem Parallelstreifen mit Mittellinie auf dem Niveau $1/2$ alle Glieder der Folge bis auf endlich viele liegen.

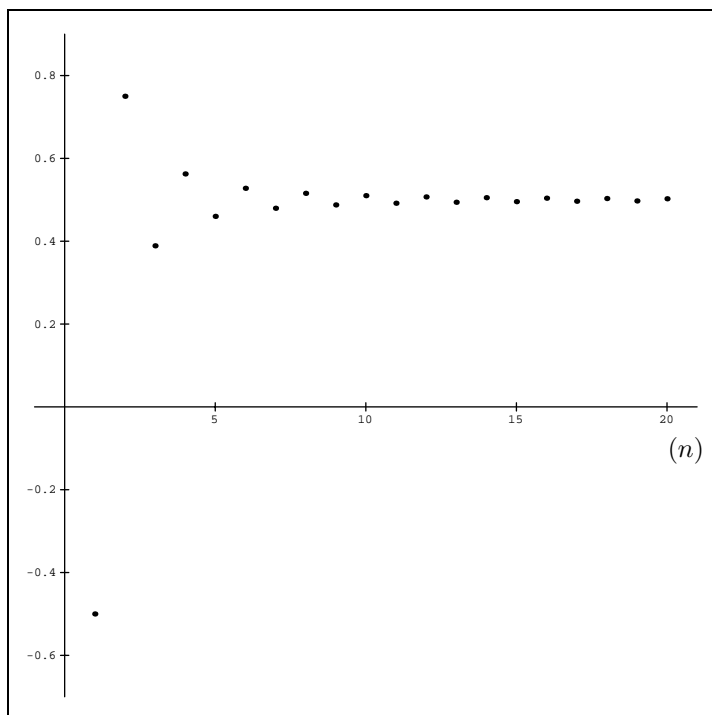


FIG. 3:

$$\frac{1}{2} + (-1)^n \frac{1}{n^2}$$

In einem solchen Fall sagen wir, die Folge *konvergiere gegen den Grenzwert* $a = 1/2$. Die genaue Definition dieses wichtigen Begriffes ist wie folgt.

Man sagt, die Folge a_1, a_2, \dots konvergiere gegen den **Grenzwert** oder **Limes** a , falls die Folge $b_n = a_n - a$ eine Nullfolge ist, d.h. wenn es zu jeder noch so kleinen Zahl $\epsilon > 0$ ein m gibt, so dass für alle Glieder a_{m+k} , $k \geq 0$ gilt

$$|a_{m+k} - a| < \epsilon.$$

In Zeichen drückt man dies aus durch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

oder durch

$$a_n \rightarrow a \text{ für } n \rightarrow \infty$$

aus.

Eine Folge, die konvergiert, heisst *konvergent*, eine Folge die nicht konvergiert, heisst *divergent*.

Aus unserer Definition folgt sofort, dass eine konvergente Folge beschränkt ist. Wir können diesen logischen Sachverhalt auch so ausdrücken: Eine *nicht* beschränkte Folge ist *nicht* konvergent. Ferner lässt sich leicht zeigen, dass eine konvergente Folge nicht gegen mehr als einen Grenzwert konvergieren kann: ist die Folge konvergent, so ist ihr Limes eindeutig bestimmt.

Sehr wichtig ist nun die Tatsache, dass in manchen Fällen gezeigt werden kann, dass eine Folge konvergiert, ohne dass über deren Limes a priori etwas bekannt ist. Dies ist z.B. auf Grund des folgenden Satzes möglich, welcher eine fundamentale Eigenschaft der reellen Zahlen beschreibt. Wir führen ihn hier *ohne Beweis* auf.

Satz *Ist eine Folge monoton wachsend (oder fallend) und beschränkt, so ist sie konvergent.*

Beispiel Ein ganz einfaches Beispiel ist das folgende. Jeder unendliche Dezimalbruch definiert eine monoton wachsende, beschränkte Folge (von rationalen Zahlen), indem man als Glieder der Folge einfach die endlichen Dezimalbrüche nimmt. Die Zahl π zum Beispiel definiert die Folge

$$3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159, 3.141592, 3.1415926, \dots$$

Nach obigem Satz konvergiert die so erhaltene Folge; ihr Limes ist die durch den unendlichen Dezimalbruch dargestellte reelle Zahl.

Beispiel (siehe Figur 4)

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}, n \geq 1.$$

Diese Folge ist (strikt) monoton wachsend und - wie wir unten zeigen - beschränkt. Deshalb ist sie nach dem obigen Satz auch konvergent. Ihr Limes, der a priori nicht bekannt ist und erst mit Hilfe dieser Folge berechnet werden kann, ist die Euler'sche Zahl e . Es ist bekannt, dass die Zahl e irrational ist, d.h. durch einen unendlichen nichtperiodischen Dezimalbruch dargestellt wird. Näherungsweise gilt $e = 2.7182818284590\dots$. Die Zahl e spielt als Basis der natürlichen Logarithmen in der Mathematik eine grosse Rolle.

Um zu zeigen, dass die Folge beschränkt ist, benützen wir die offensichtlichen Abschätzungen

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{2!} & \leq & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3!} & \leq & \frac{1}{2^2} \\ \frac{1}{4!} & \leq & \frac{1}{2^3} \\ & \vdots & \\ \frac{1}{n!} & \leq & \frac{1}{2^{n-1}} \\ & \vdots & \end{array}$$

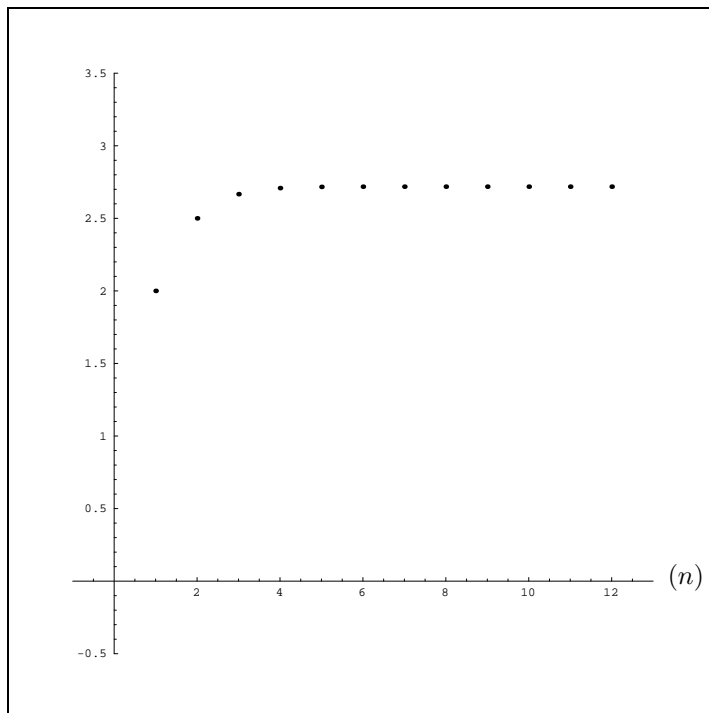


FIG. 4:

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

Es ist dann

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = x .$$

Damit gilt

$$\frac{1}{2}x = x - \frac{1}{2}x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2^n},$$

also

$$x = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Die Folge ist also beschränkt, es gilt $0 < a_n < 3$.

Beispiel Die harmonische Folge (siehe Figur 5) ist definiert durch

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} .$$

Diese Folge ist offensichtlich ebenfalls (strikt) monoton wachsend. Um über die Konvergenz zu entscheiden, muss man nur untersuchen, ob sie beschränkt ist. Ist sie beschränkt, so ist sie nach unserem Satz auch konvergent. Ist sie nicht beschränkt, so kann sie nach unseren früheren Aussagen auch nicht konvergent sein. Wir zeigen anschliessend, dass die Glieder der Folge beliebig gross werden, wenn nur ihr Index genügend gross ist. Die Folge ist somit in der Tat nicht beschränkt. Die harmonische Folge ist nicht konvergent.

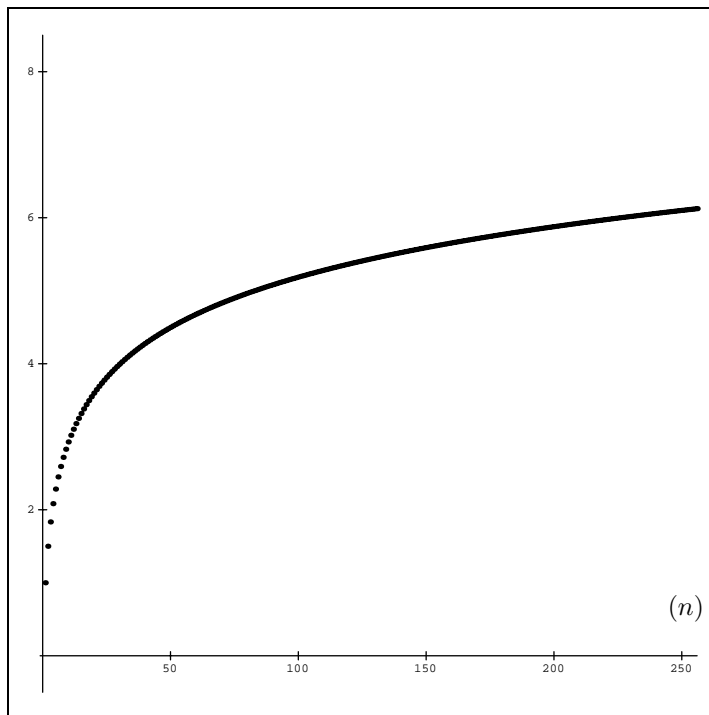


FIG. 5:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Um zu zeigen, dass unsere Folge nicht beschränkt ist, benützen wir die Beziehung

$$a_{2n} - a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},$$

die unmittelbar aus der Definition folgt. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + (a_2 - a_1) && \geq 1 + 1/2, \\ a_{2^2} &= a_2 + (a_{2^2} - a_2) && \geq 1 + 2/2, \\ a_{2^3} &= a_{2^2} + (a_{2^3} - a_{2^2}) && \geq 1 + 3/2, \\ &\vdots \\ a_{2^r} &= a_{2^{r-1}} + (a_{2^r} - a_{2^{r-1}}) && \geq 1 + r/2. \end{aligned}$$

Die Glieder der Folge werden also beliebig gross, die Folge ist *nicht* beschränkt.

Beispiel Wir kehren zurück zur Folge des ersten Beispiels, nämlich zu

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{c}{a_n} \right), \quad n \geq 1,$$

wobei $c > 0$ eine feste reelle Zahl bezeichnet (siehe Figur 6). Wir behaupten, dass diese Folge konvergiert, und zwar gegen \sqrt{c} . Um dies zu beweisen, müssen wir nachweisen, dass die Folge b_1, b_2, b_3, \dots mit $b_n = a_n - \sqrt{c}$ eine Nullfolge ist. Aus der Definition von a_{n+1} erhalten wir

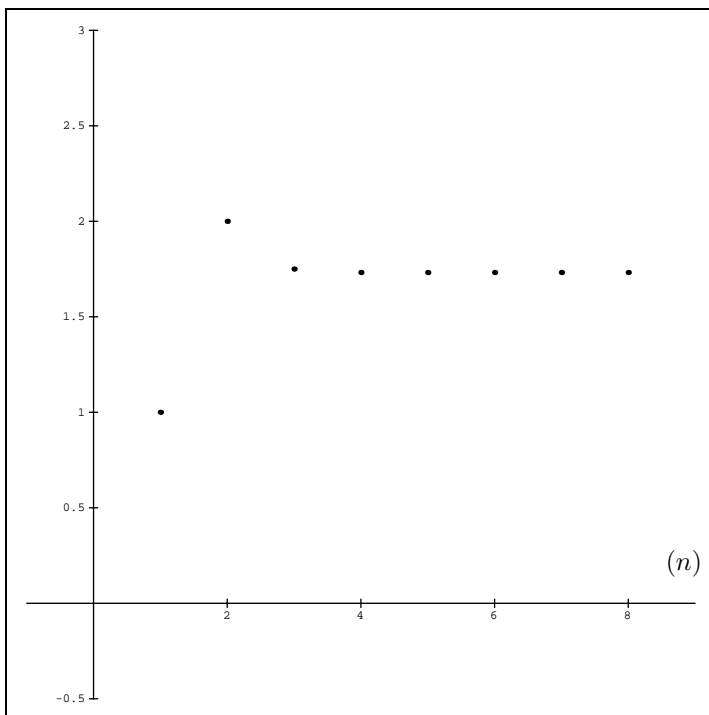


FIG. 6:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{3}{a_n} \right)$$

$$\begin{aligned} b_{n+1} = a_{n+1} - \sqrt{c} &= \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{c}{a_n} - 2\sqrt{c} \right) \\ &= \frac{1}{2a_n} (a_n^2 + c - 2a_n\sqrt{c}) \\ &= \frac{1}{2a_n} (a_n - \sqrt{c})^2. \end{aligned}$$

Wegen $a_n \geq 0$ ergibt sich daraus $b_n \geq 0$ für $n = 2, 3, \dots$. Ferner erhalten wir

$$b_{n+1} = \frac{a_n - \sqrt{c}}{2a_n} \cdot b_n$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{c}}{2a_n} \right) \cdot b_n.$$

Nun gilt für $n \geq 2$ wegen $b_{n+1} \geq 0$ und $b_n \geq 0$ auch

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{c}}{2a_n} \geq 0.$$

Da auch $\sqrt{c}/2a_n$ positiv ist, folgt

$$0 \leq \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{c}}{2a_n} < \frac{1}{2}.$$

Damit erhalten wir

$$|b_{n+1}| < \frac{1}{2}|b_n|,$$

d.h. die Folge b_1, b_2, b_3, \dots ist in der Tat eine Nullfolge.

Für das Rechnen mit konvergenten Folgen gelten einfache **Rechenregeln**, die wir kurz zusammenstellen. Es seien a_1, a_2, \dots und b_1, b_2, \dots zwei konvergente Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) = a/b,$$

wobei für Letzteres natürlich vorausgesetzt werden muss, dass b und alle b_n verschieden von Null sind.

Wir verzichten in dieser Vorlesung auf einen Beweis dieser Regeln, möchten aber die beiden folgenden Bemerkungen anfügen. Sind die beiden Folgen a_1, a_2, \dots und b_1, b_2, \dots durch unendliche Dezimalbrüche gegeben, so besagen diese Rechenregeln nichts anderes, als dass man approximativ mit den endlichen Teilbrüchen rechnen darf. Eine Tatsache, die man natürlich etwa beim Rechnen mit π immer schon benützt hat. Zum zweiten muss der Leser gewarnt werden, diese Regeln in Fällen anzuwenden, wo die Folgen a_1, a_2, \dots und b_1, b_2, \dots nicht konvergieren. In diesem Fall gelten die Regeln nicht, und deren Anwendung liefert leicht falsche Resultate.

Beispiel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{2n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3/n}{2+5/n} = \frac{1}{2}$$

Beispiel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n^2 + 1}{-3n^3 + 13} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 1/n + 1/n^3}{-3 + 13/n^3} = -\frac{1}{3}$$

Beispiel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{17n^2}{18n + 1} \text{ existiert nicht}$$

Beispiel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2}{n^2 + 3} \right)^4 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{1 + 3/n^2} \right)^4 = 2^4$$

Zum Schluss dieses Abschnittes gehen wir noch kurz auf die geometrische Folge und die geometrische Reihe ein.

Beispiel Eine Folge der Form

$$a_0 = a, a_1 = aq, \dots, a_n = aq^n, \dots$$

heisst **geometrische Folge**. Die Zahl a heisst *Anfangsglied*, die Zahl q heisst *Faktor* der Folge. Für $|q| > 1$ gilt

$$|a_{n+1}| = |a_n q| = |a_n| |q| > |a_n|.$$

Die Absolutbeträge der Glieder der Folge werden mit wachsendem n beliebig gross; die Folge ist in diesem Fall nicht beschränkt, also auch nicht konvergent. Für $|q| < 1$ hingegen gilt

$$|a_{n+1}| = |a_n q| = |a_n| |q| < |a_n|.$$

Die Absolutbeträge der Glieder werden mit wachsendem n beliebig klein. Ist nämlich $\epsilon > 0$ irgendeine positive reelle Zahl, so gilt $|a_m| < \epsilon$, wenn nur m gross genug ist. Die Bedingung $|aq^m| < \epsilon$ liefert nämlich

$$\log |a| + m \log |q| < \log \epsilon,$$

woraus sich wegen $\log |q| < 0$ sofort

$$m > \frac{\log \epsilon - \log |a|}{\log |q|}$$

ergibt. Diese Überlegung zeigt, dass für $|q| < 1$ die geometrische Folge eine Nullfolge ist.

Beispiel Schliesslich wenden wir uns noch der sogenannten **geometrischen Reihe** zu. Darunter versteht man die Folge, die durch

$$\begin{aligned}
s_0 &= 1, \\
s_1 &= 1 + x, \\
&\vdots \\
s_n &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n, \\
s_{n+1} &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^{n+1},
\end{aligned}$$

gegeben ist. Dabei bezeichnet x eine reelle Zahl. (Der Leser mache sich den Unterschied zwischen den Begriffen “Folge” und “Reihe” klar!) Rekursiv kann man die Folge s_0, s_1, s_2, \dots beschreiben durch

$$s_0 = 1; \quad s_{n+1} = s_n + x^{n+1}, \quad n \geq 0.$$

Man erhält leicht $s_{n+1} - s_n = x^{n+1}$, woraus sich sofort

$$s_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} - \frac{x^{n+1}}{1 - x}$$

ergibt. Ist $|x| < 1$, so strebt der zweite Summand für $n \rightarrow \infty$ offensichtlich gegen Null. Deshalb konvergiert in diesem Fall die Folge s_0, s_1, s_2, \dots , und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x + x^2 + \cdots + x^n) = \frac{1}{1 - x}, \quad |x| < 1.$$

Für $|x| > 1$ ist die Folge s_0, s_1, s_2, \dots offenbar nicht beschränkt, so dass sie in diesem Fall auch nicht konvergent ist. Man sagt etwas kürzer, die geometrische *Reihe*

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

konvergiere für $|x| < 1$ gegen $1/(1 - x)$ und divergiere für $|x| > 1$, indem man die Konvergenz bzw. Divergenz der *Reihe* durch die Konvergenz bzw. Divergenz der zugehörigen *Folge* definiert (siehe Figuren 7,8,9). Konsequenterweise schreibt man dann

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1 - x}, \quad \text{für } |x| < 1.$$

Die linke Seite dieser Formel kann man als “alternative” Definition der Funktion

$$f : x \rightarrow \frac{1}{1 - x}, \quad D(f) = (-1, +1)$$

auffassen (siehe Figur 10). (Der Leser beachte die Einschränkung des Definitionsbereiches!) Insbesondere kann der Funktionswert $f(x)$ für $|x| < 1$ als Limes unserer Folge s_0, s_1, s_2, \dots berechnet werden. Für die einfache Funktion f scheint dies fast eine Spielerei zu sein; für kompliziertere Funktionen bildet eine Reihe aber oft die natürlichste Art, die Funktion darzustellen und den Funktionswert zu bestimmen. Wir werden auf dieses Thema unter dem Stichwort Potenzreihen später wieder zu sprechen kommen und uns etwas eingehender damit beschäftigen.

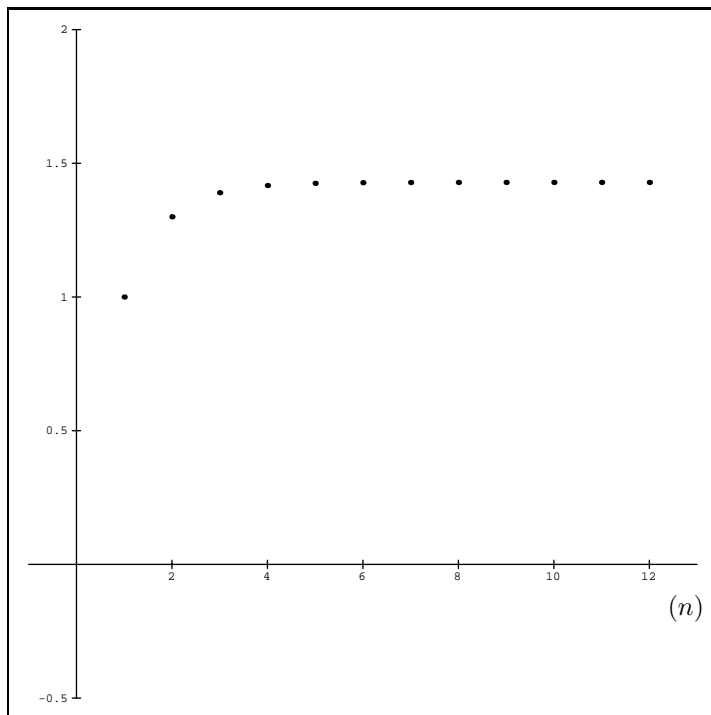


FIG. 7:
Geometrische Reihe
mit $x = 0.3$

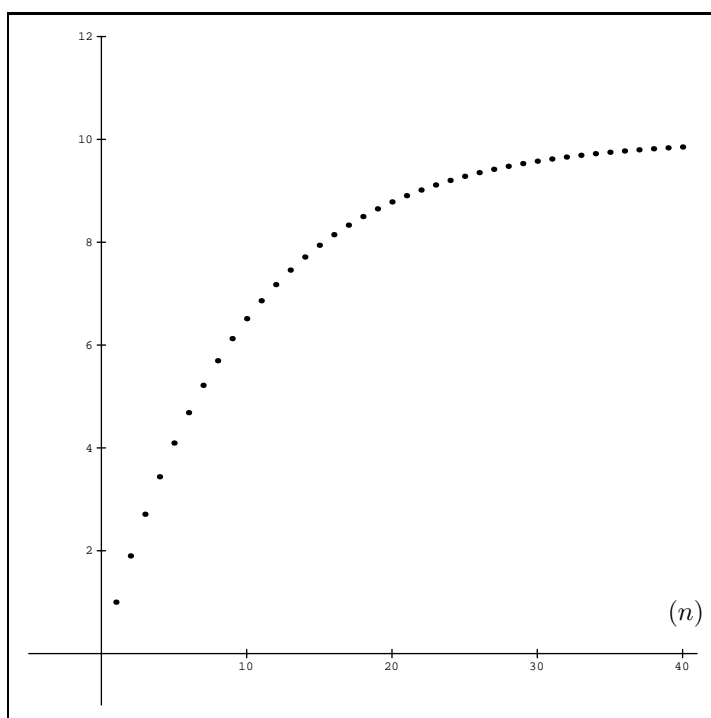


FIG. 8:
Geometrische Reihe
mit $x = 0.9$

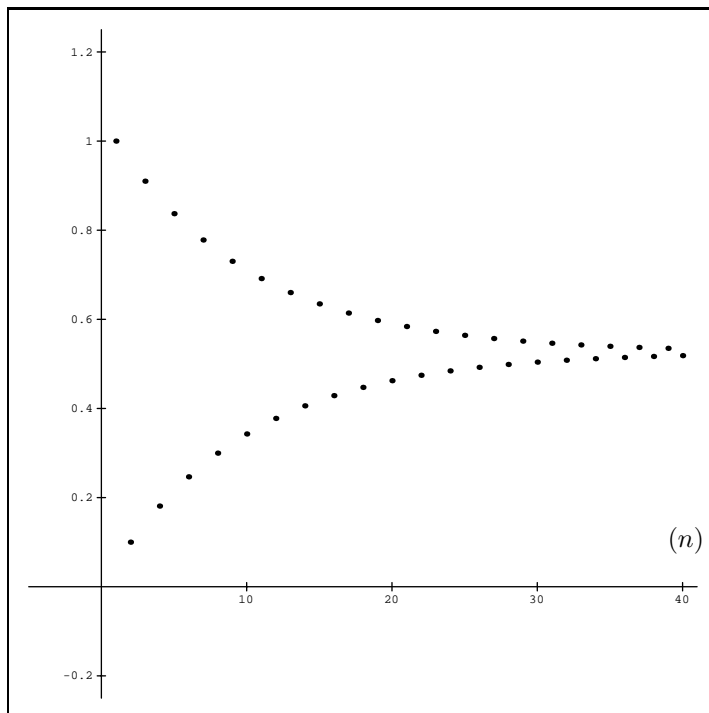


FIG. 9:
Geometrische Reihe
mit $x = -0.9$

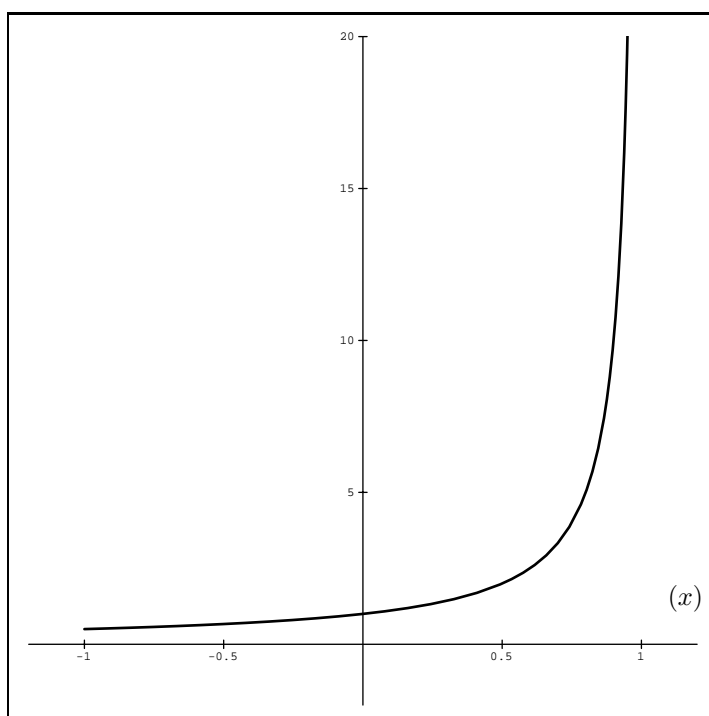


FIG. 10:
Die Funktion
 $x \rightarrow \frac{1}{1-x}$