

7 Asymptoten

In diesem letzten kurzen Abschnitt betrachten wir das Verhalten von Funktionen für grosse Werte von x . Gegeben sei eine Funktion $f : x \rightarrow f(x)$, welche mindestens auf dem Intervall (c, ∞) definiert ist. Wir nennen eine Funktion $g : x \rightarrow g(x)$ eine **Asymptote** von f für $x \rightarrow \infty$, wenn gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 0 .$$

In diesem Fall schmiegen sich die Graphen der beiden Funktionen f und g für $x \rightarrow \infty$ einander an. Am einfachsten ist die Situation, wenn g eine lineare Funktion ist, dann schmiegt sich der Graph von f einer Geraden an. Ist man für grosse x nur an einer Approximation von f interessiert, so kann für solche Werte von x die (kompliziertere) Funktion f durch die (einfachere) Funktion g ersetzt werden. Es ist klar, dass eine analoge Definition für $x \rightarrow -\infty$ gemacht werden kann. Wir betrachten anschliessend einige Beispiele.

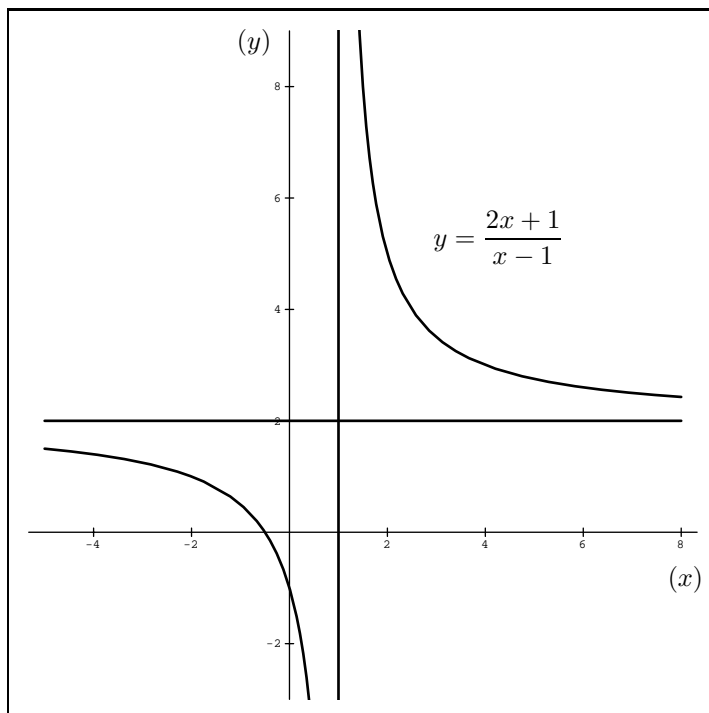


FIG. 1 :

$$x \rightarrow \frac{2x + 1}{x - 1}$$

Beispiel Es sei $f : x \rightarrow (2x + 1)/(x - 1)$. Wegen

$$\frac{2x+1}{x-1} = \frac{2x-2+3}{x-1} = 2 + \frac{3}{x-1}$$

ist offensichtlich $g : x \rightarrow 2$ eine Asymptote von f für $x \rightarrow \infty$ (und auch für $x \rightarrow -\infty$) (siehe Figur 1).

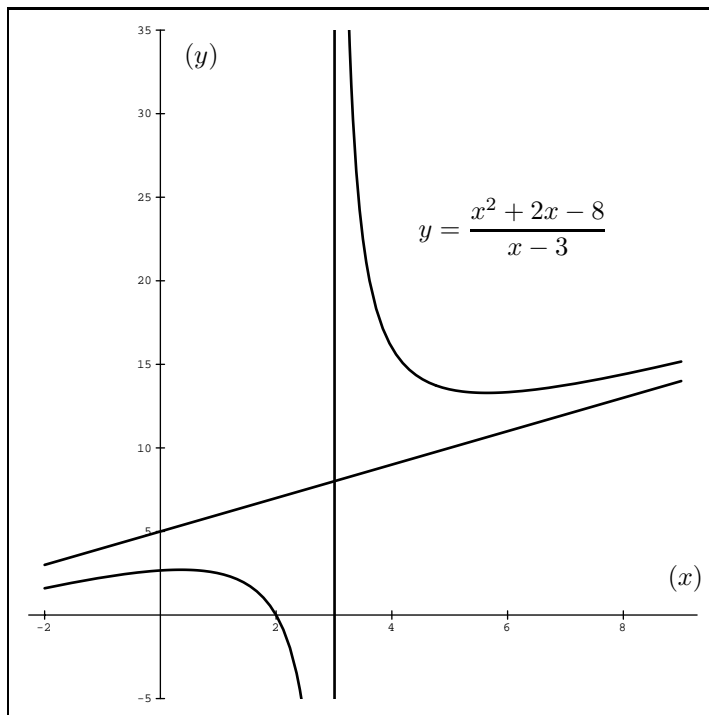


FIG. 2:

$$x \rightarrow \frac{x^2 + 2x - 8}{x - 3}$$

Beispiel Es sei

$$f : x \rightarrow \frac{x^2 + 2x - 8}{x - 3} = x + 5 + \frac{7}{x - 3} .$$

Offenbar ist $g : x \rightarrow x + 5$ eine Asymptote von f für $x \rightarrow \pm\infty$ (siehe Figur 2). (Die Funktion f besitzt in $x = 3$ einen *Pol*. Man sagt in dieser Situation dann auch etwa, die vertikale Gerade $x = 3$ sei eine Asymptote von f für $x \rightarrow \pm 3$. Streng genommen ist dies von unserer Definition einer Asymptote nicht abgedeckt.)

Beispiel Es sei

$$f : x \rightarrow -1 + \sqrt{x^2 + 1} .$$

Wir behaupten, dass $g : x \rightarrow x - 1$ eine Asymptote von f für $x \rightarrow \infty$ ist, und dass $h : x \rightarrow -x - 1$ eine Asymptote von f für $x \rightarrow -\infty$ ist (siehe Figur 3). Da die Funktion f gerade ist, ist nur eine der Behauptungen zu beweisen. Es gilt in der Tat

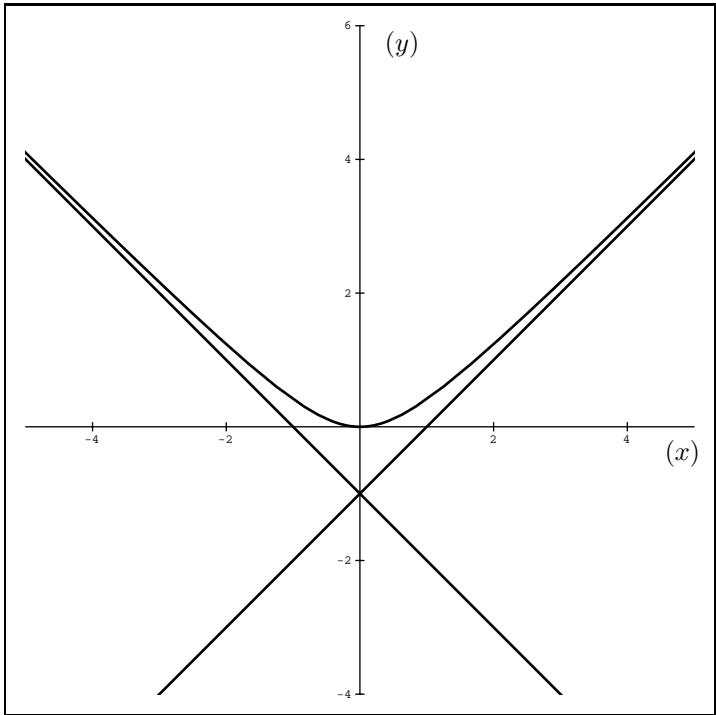


FIG. 3:

$$x \rightarrow -1 + \sqrt{x^2 + 1}$$

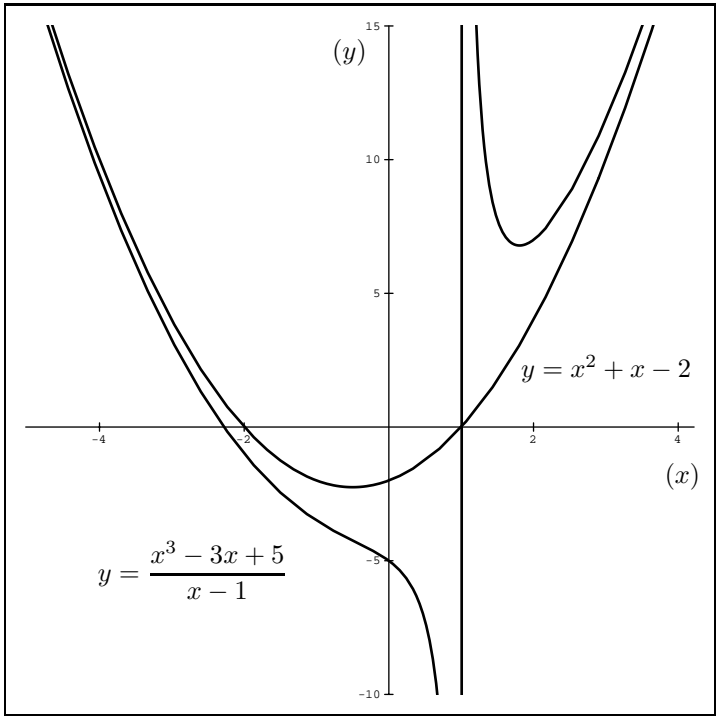


FIG. 4:

$$x \rightarrow \frac{x^3 - 3x + 5}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left((-1 + \sqrt{x^2 + 1}) - (x - 1) \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x^2 + 1) - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \right) = 0 .$$

Beispiel Es sei

$$f : x \rightarrow \frac{x^3 - 3x + 5}{x - 1} = x^2 + x - 2 + \frac{3}{x - 1} .$$

Es ist folglich die quadratische Funktion $g : x \rightarrow x^2 + x - 2$ sowohl für $x \rightarrow \infty$ wie für $x \rightarrow -\infty$ eine Asymptote von f (siehe Figur 4).