

7 Die zweite und höhere Ableitungen

Ausgehend von einer Funktion $f : x \rightarrow f(x)$ haben wir die Ableitung $f'(x)$ definiert. Ihr Wert an der Stelle x gibt die Tangentensteigung des Graphen von f im Punkt $(x, f(x))$ an. Es ist klar, dass die Zuordnung

$$f' : x \rightarrow f'(x)$$

wiederum eine Funktion definiert, wobei der Definitionsbereich von f' aus allen Punkten x besteht, in denen die Ableitung von f existiert. Folglich kann für f' wiederum die Ableitung $(f')'$ gebildet werden. Man schreibt

$$(f')'(x) = f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x)$$

und nennt f'' die **zweite Ableitung** von f nach x .

Beispiel Ist $s : t \rightarrow s(t)$ die Wegfunktion einer Bewegung eines Massenpunktes (auf der s -Achse), so ist

$$\frac{ds}{dt}(t) = \dot{s}(t) = v(t)$$

die Geschwindigkeit (Schnelligkeit) und

$$\frac{d^2 s}{dt^2}(t) = \ddot{s}(t) = a(t)$$

die Beschleunigung des Massenpunktes. (Bei Funktionen der Zeit t braucht man gern Punkte zur Bezeichnung der Ableitung nach t .)

Natürlich kann zu f'' wiederum die Ableitung $(f'')'$ definiert werden. Man spricht dann von der dritten Ableitung f''' von f nach x , usw.

Beispiel Es sei $f : x \rightarrow x^n$, n ganz. Dann ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= n \cdot x^{n-1} \\ f''(x) &= n(n-1)x^{n-2} \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 \end{aligned}$$

und alle höheren Ableitungen sind Null.

Die zweite Ableitung einer Funktion $f : x \rightarrow f(x)$ hat eine wichtige Bedeutung für den Graphen von f . Ist nämlich $f''(x_0) > 0$, so ist an dieser Stelle die erste Ableitung f' , also die Steigung des Graphen von f zunehmend. Durchläuft man den Graphen von f in Richtung zunehmenden x , so ist an der Stelle x_0 die Kurve deshalb nach *links* gekrümmt (konvex). Ist $f''(x_0) < 0$, so ist die erste Ableitung f' , also die Steigung des Graphen von f' abnehmend. Durchläuft man den Graphen von f in Richtung zunehmenden x , so ist an der Stelle x_0 die Kurve deshalb nach *rechts* gekrümmt (konkav). Ändert f'' das Vorzeichen in x_0 , so weist der Graph von f an dieser Stelle einen *Wendepunkt* auf.

Beispiel Für die Funktion

$$f : x \rightarrow x^5 - \frac{7}{2}x^4 - 32x^3 + \frac{177}{2}x^2 + 126x - 270$$

tragen wir in ein und dasselbe Koordinatensystem die Graphen der Funktion f und der Ableitungen f', f'', f''', \dots ein. Auf diese Weise lassen sich nicht nur die uns schon gut bekannten Beziehungen leicht verfolgen, die zwischen lokalen Extremalstellen von f und den Nullstellen von f' bestehen, sondern auch diejenigen, die zwischen den Wendepunkten des Graphen von f und den Nullstellen von f'' bestehen (siehe Figur 1).

Die geometrische Bedeutung der 2. Ableitung ist nützlich, wenn es darum geht, den groben Verlauf des Graphen einer Funktion herauszufinden.

Beispiel Es sei $f : x \rightarrow (x - 1)^{1/3}$ (siehe Figur 2). Der Definitionsbereich von f besteht offensichtlich aus allen reellen Zahlen. Bei $x = 1$ hat die Funktion eine Nullstelle; für $x < 1$ ist der Funktionswert negativ, für $x > 1$ ist der Funktionswert positiv. Die Ableitung von f ergibt sich zu

$$f' : x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}(x - 1)^{-2/3}.$$

Offensichtlich ist f' an der Stelle $x = 1$ nicht definiert. Überall sonst ist die Ableitung positiv, die Funktion f ist also strikt monoton wachsend. Die Tatsache, dass $f'(x)$ für $x \rightarrow 1^\pm$ gegen ∞ strebt, zeigt, dass der Graph von f bei $x = 1$ eine vertikale Tangente besitzt. Die zweite Ableitung von f ist

$$f'' : x \rightarrow f''(x) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}(x - 1)^{-5/3}.$$

Die zweite Ableitung von f ist für $x < 1$ positiv, der Graph von f in diesem Bereich also nach links gekrümmt (konvex). Für $x > 1$ ist die zweite Ableitung negativ, der Graph in diesem Bereich also nach rechts gekrümmt (konkav).

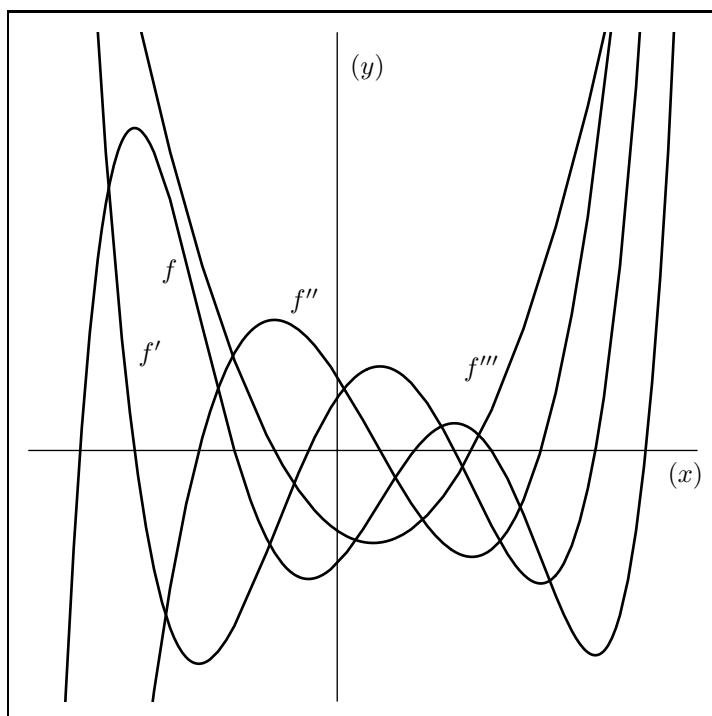


FIG. 1:
Die Graphen der ersten drei
Ableitungen von f

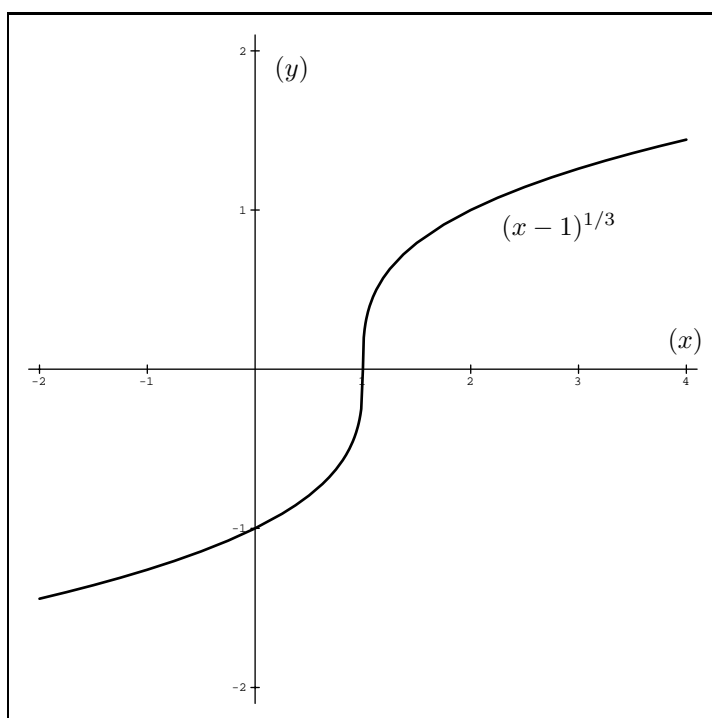


FIG. 2:
Der Graph der Funktion

$$f : x \rightarrow (x-1)^{1/3}$$

Beispiel Es sei $f : x \rightarrow e^{-x^2/2}$. Der Graph dieser Funktion heisst **Gauss'sche Fehlerkurve** (siehe Figur 3). Diese spielt in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik im Zusammenhang mit der sogenannten Normalverteilung eine grosse Rolle. Offenbar ist die Funktion f auf der ganzen reellen Zahlgeraden definiert. Da der Exponent von e für alle von Null verschiedenen x negativ ist, ist der Wertebereich der Funktion f das Intervall $(0, 1]$. Klar ist auch, dass die Funktion gerade ist, da x nur im Quadrat vorkommt. Wir dürfen uns deshalb bei der Diskussion auf den Bereich $x \geq 0$ beschränken. Für $x \rightarrow \infty$ strebt $f(x)$ gegen 0, so dass die x -Achse eine Asymptote für $x \rightarrow \infty$ ist. Die Ableitung von f ist die Funktion

$$f' : x \rightarrow -x \cdot e^{-x^2/2} .$$

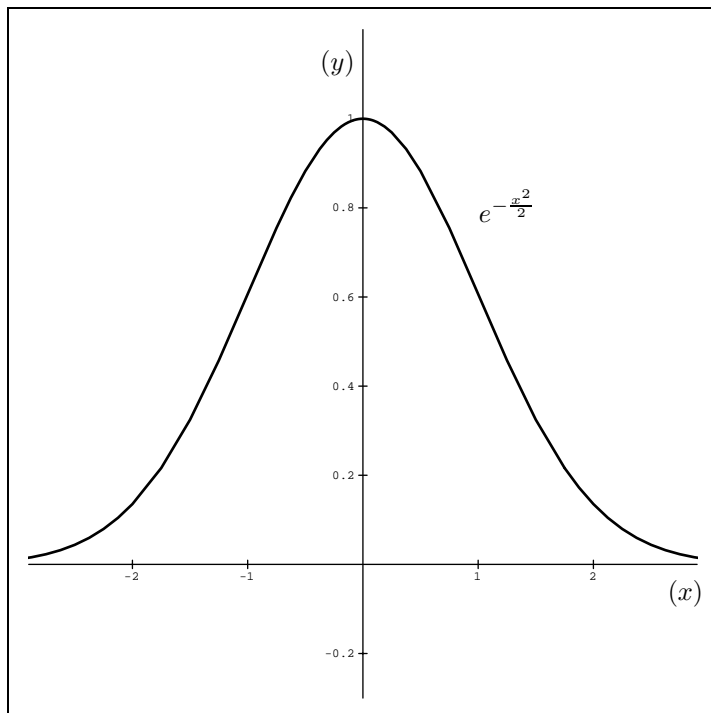


FIG. 3 :
Die Gauss'sche Fehlerkurve

Man liest daran ab, dass für $x > 0$ der Graph von f monoton fallend ist und dass er an der Stelle $x = 0$ eine horizontale Tangente aufweist. Die zweite Ableitung ist

$$f'' : x \rightarrow (x^2 - 1) \cdot e^{-x^2/2} .$$

Im Bereich $0 \leq x < 1$ ist diese negativ, der Graph von f also nach rechts gekrümmt; im Bereich $1 < x < \infty$ ist sie positiv, der Graph also nach links gekrümmt. An der Stelle $x = 1$ wechselt die

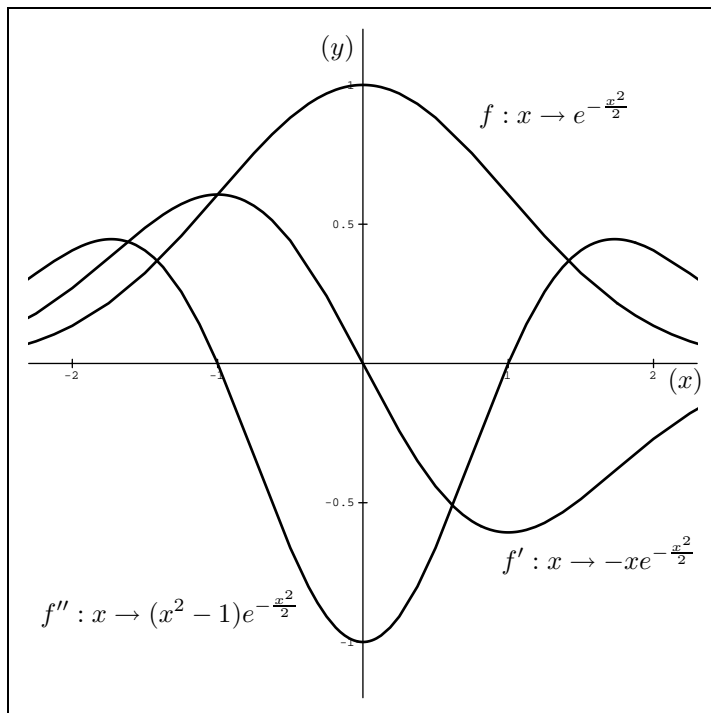


FIG. 4:
Die ersten zwei Ableitungen von
 $f : x \rightarrow e^{-x^2/2}$

zweite Ableitung ihr Vorzeichen, der Graph von f weist demzufolge im Punkt $(1, e^{-1/2})$ einen Wendepunkt auf (siehe Figur 4).

Das Newton'sche Gesetz der Mechanik

$$\text{Kraft} = \text{Masse} \times \text{Beschleunigung}$$

verknüpft die Beschleunigung eines Massenpunktes m mit der auf diesen wirkenden Kraft K . Da die Beschleunigung die zweite Ableitung der Wegfunktion ist, ist das zweite Newton'sche Gesetz vom mathematischen Standpunkt aus nichts anderes als eine Differentialgleichung für die Wegfunktion $t \rightarrow s(t)$, in welcher die *zweite* Ableitung $\ddot{s}(t)$ vorkommt

$$m \cdot \ddot{s}(t) = K.$$

Dabei hängt die Kraft möglicherweise von s und t ab. Wir werden uns im 2. Semester eingehend mit solchen Differentialgleichungen beschäftigen, wollen aber an dieser Stelle über eine spezielle Differentialgleichung dieser Art schon einige Bemerkungen einfügen, nämlich über die Differentialgleichung der harmonischen Schwingung.

Der Massenpunkt m sei an einer (idealen) Feder aufgehängt, so dass auf m eine zur Auslenkung $s(t)$ aus der Ruhelage proportionale Rückstellkraft wirkt. Aus dem Newton'schen Gesetz ergibt sich dann die Differentialgleichung

$$m\ddot{s}(t) = -k s(t), \quad k > 0$$

oder anders geschrieben

$$(7.1) \quad \ddot{s}(t) + \omega^2 s(t) = 0,$$

wobei wir $\omega^2 = k/m$ gesetzt haben. Das ist die Differentialgleichung der **harmonischen Schwingung**. Durch Einsetzen verifiziert man ohne Schwierigkeit, dass jede Funktion der Form

$$(7.2) \quad s(t) = B \cos(\omega t) + C \sin(\omega t), \quad B, C \in \mathbb{R}$$

die Differentialgleichung (7.1) erfüllt und deshalb eine Lösung dieser Gleichung ist. Ebenso leicht verifiziert man, dass jede Funktion der Form

$$(7.3) \quad s(t) = A \cos(\omega t + \varphi), \quad A, \varphi \in \mathbb{R}$$

die Differentialgleichung (7.1) erfüllt. Wir behaupten, dass es sich bei (7.2) und (7.3) um zwei verschiedene Schreibweisen für dieselben Funktionen handelt. (Dass wir damit wirklich *alle* Lösungen der Differentialgleichung (7.1) beschreiben, werden wir im 2. Semester sehen.)

Wenden wir auf (7.3) die bekannte Summenformel für den Cosinus an, so erhalten wir

$$s(t) = A \cos \varphi \cos(\omega t) - A \sin \varphi \sin(\omega t).$$

Setzt man also $B = A \cos \varphi$, $C = -A \sin \varphi$, so erhält man eine Funktion der Form (7.2). Geht man umgekehrt von der Funktion

$$s(t) = B \cos(\omega t) + C \sin(\omega t)$$

aus und definiert man $A = \sqrt{B^2 + C^2}$ und $\tan \varphi = -C/B$, so erhält man eine Funktion der Form (7.3). Man nennt (7.2) die *zweiteilige* und (7.3) die *einteilige* Schreibweise der harmonischen Schwingung.

In der Praxis spielen sogenannte *gedämpfte* harmonische Schwingungen eine grosse Rolle. Etwas ungenau, aber einprägsam, kann man diese als harmonische Schwingung beschreiben, deren

Amplitude exponentiell abklingt (siehe Figur 5). Eine gedämpfte harmonische Schwingung ist von der Form

$$t \rightarrow e^{-at} \cos(\omega t + \varphi), \quad a > 0.$$

Wie wir später sehen werden, führt ein an einer Feder aufgehängter Massenpunkt eine gedämpfte Schwingung aus, wenn auf ihn neben der Rückstellkraft eine *Dämpfungskraft* wirkt, die zur Geschwindigkeit proportional ist.

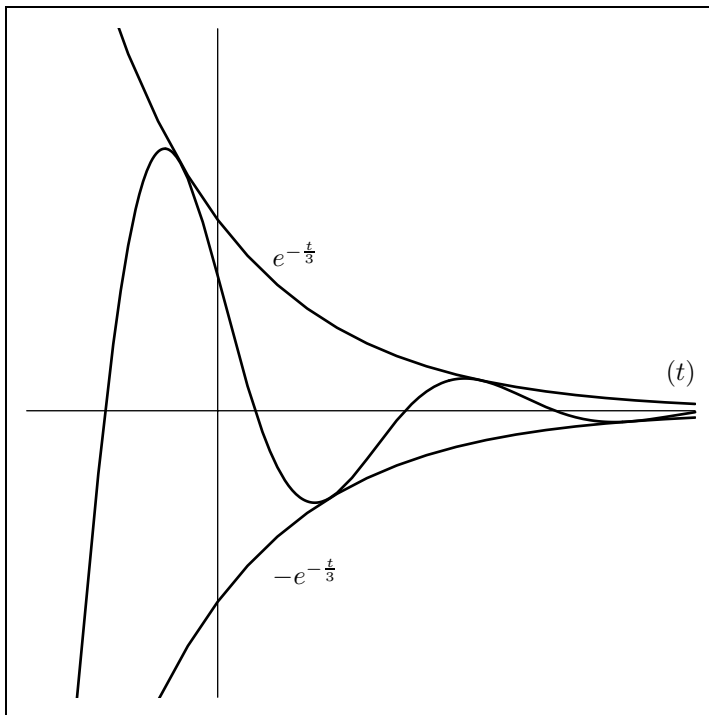


FIG. 5:
Zum Verlauf der gedämpften
harmonischen Schwingung

$$t \rightarrow e^{-\frac{t}{3}} \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Beispiel Um uns (qualitativ) über den Verlauf einer gedämpften harmonischen Schwingung ein Bild zu machen, betrachten wir die Funktion

$$f : t \rightarrow e^{-t} \sin t$$

etwas näher, d.h. wir setzen $a = 1$, $\omega = 1$, $\varphi = -\pi/2$ (siehe Figur 6). Die erste und zweite Ableitung von f ergibt sich nach kurzer Rechnung zu

$$f' : t \rightarrow e^{-t} \cdot (-\sin t + \cos t),$$

$$f'' : t \rightarrow 2e^{-t} \cdot (-\cos t).$$

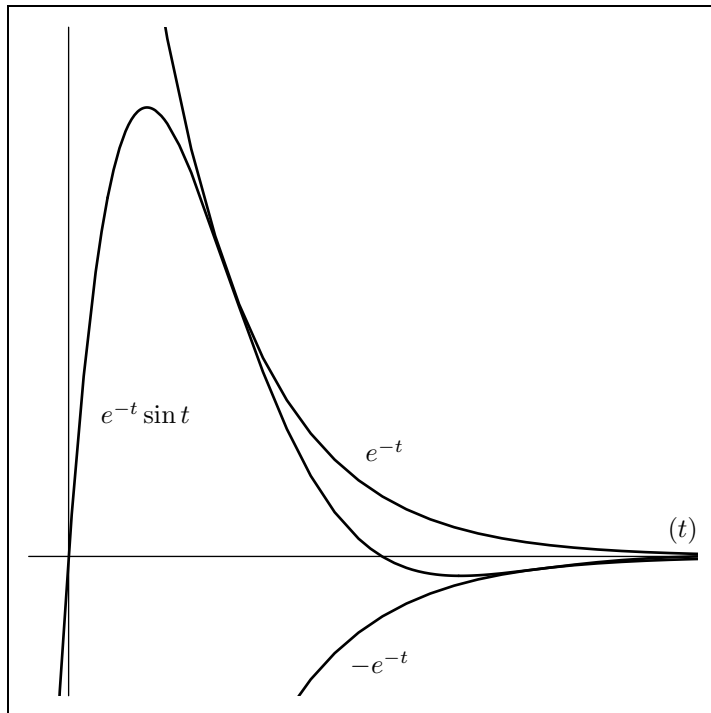


FIG. 6:
Der Graph der Funktion

$$f : t \rightarrow e^{-t} \sin t$$

Die Lösung der Gleichung $f(t) = 0$ liefert die Nullstellen: $t = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Die Lösung der Gleichung $f'(t) = 0$ liefert die Stellen, wo der Graph horizontale Tangenten aufweist. Man erhält

$$\begin{aligned} \cos t &= \sin t \\ \tan t &= 1 \\ t &= \pi/4 + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

Und schliesslich liefert die Gleichung $f''(t) = 0$ die Wendestellen des Graphen von f . Man erhält $t = \pi/2 + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Wegen $|\sin t| \leq 1$ oszilliert der Graph von f zwischen den beiden Kurven $y = e^{-t}$ und $y = -e^{-t}$. Ist $\sin t = 1$, so berührt der Graph von f die erste dieser Kurven, ist $\sin t = -1$ so berührt der Graph die zweite der beiden Kurven. Die t -Werte, die zu diesen Berührstellen gehören, sind $t = \pi/2 + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Man liest daran die etwas überraschende Tatsache ab, dass die Berührstellen gerade mit den Wendepunkten übereinstimmen.