

6 Grössenordnungen von Funktionen

Es sei $f : x \rightarrow f(x)$ eine Funktion, die auf dem Intervall (c, ∞) definiert ist. Die Untersuchung von $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ gibt eine erste Information über das Verhalten von $f(x)$ für grosse x . Gilt z.B.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a,$$

so bedeutet dies bekanntlich, dass der Graph von f für $x \rightarrow \infty$ die Gerade $y = a$ als horizontale Asymptote besitzt. In diesem Abschnitt wollen wir unter anderem den Fall $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ etwas näher untersuchen. Die Funktionswerte einer solchen Funktion werden mit wachsenden x beliebig gross, d.h. der Graph von f strebt für $x \rightarrow \infty$ gegen ∞ . Dies kann aber auf sehr viele verschiedene Arten geschehen, wie man etwa an den Beispielen

$$x \rightarrow x^2,$$

$$x \rightarrow \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2},$$

$$x \rightarrow \log x.$$

unmittelbar sehen kann (siehe Figur 1). Um dieses unterschiedliche Verhalten etwas in den Griff zu bekommen, führen wir die folgende Sprechweise ein. Es seien f und g zwei Funktionen, die auf dem Intervall (c, ∞) definiert sind. Dann sagen wir, die Funktion f sei für $x \rightarrow \infty$ **von kleinerer Grössenordnung** als g , wenn gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

In Zeichen drücken wir dies durch das sogenannte **Landau-Symbol** “ o ” aus:

$$f(x) = o(g(x)) \text{ für } x \rightarrow \infty.$$

Beispiel Es gilt $x^2 = o(x^3)$ für $x \rightarrow \infty$ (siehe Figur 2), denn

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^3} = 0.$$

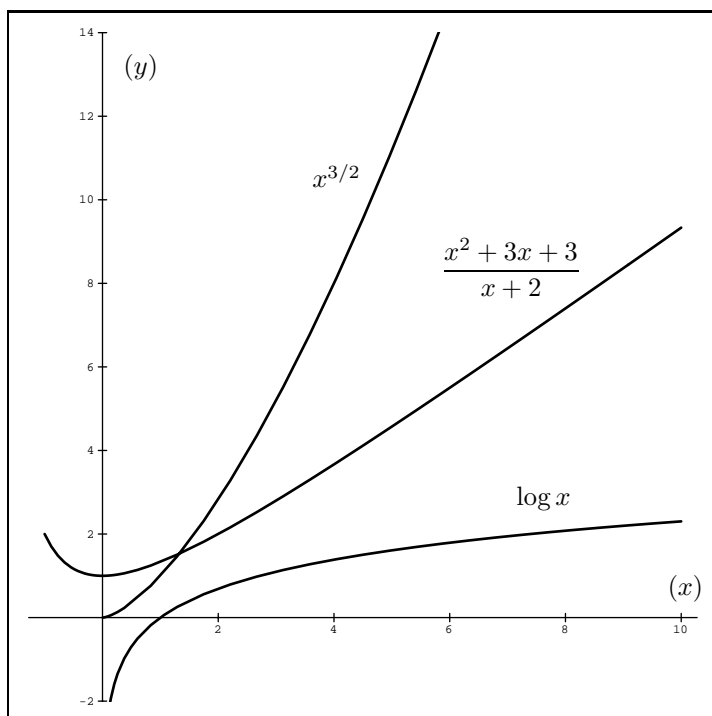


FIG. 1:
Es gibt verschiedene Arten, wie
 $f(x)$ für $x \rightarrow \infty$ gegen ∞
streben kann

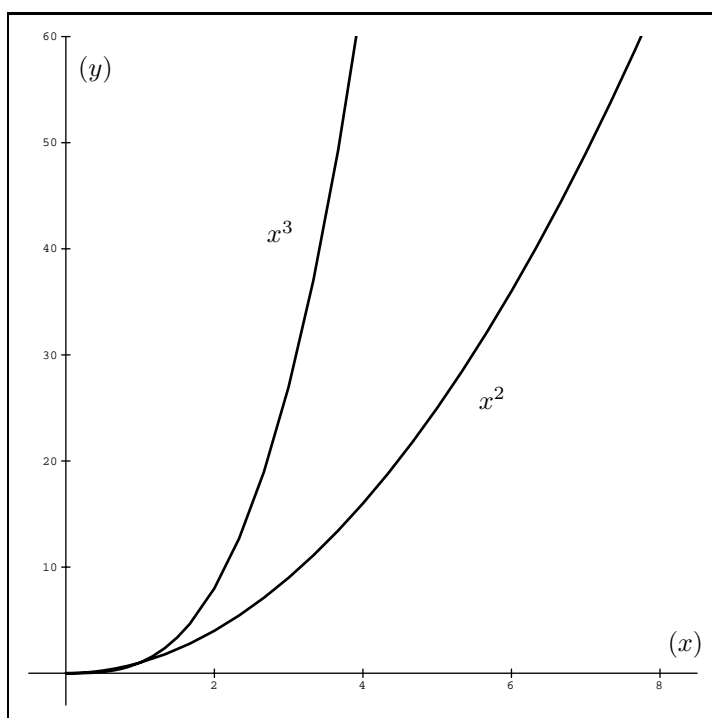


FIG. 2:
 $x \rightarrow x^2$ ist von kleinerer
Größenordnung als $x \rightarrow x^3$

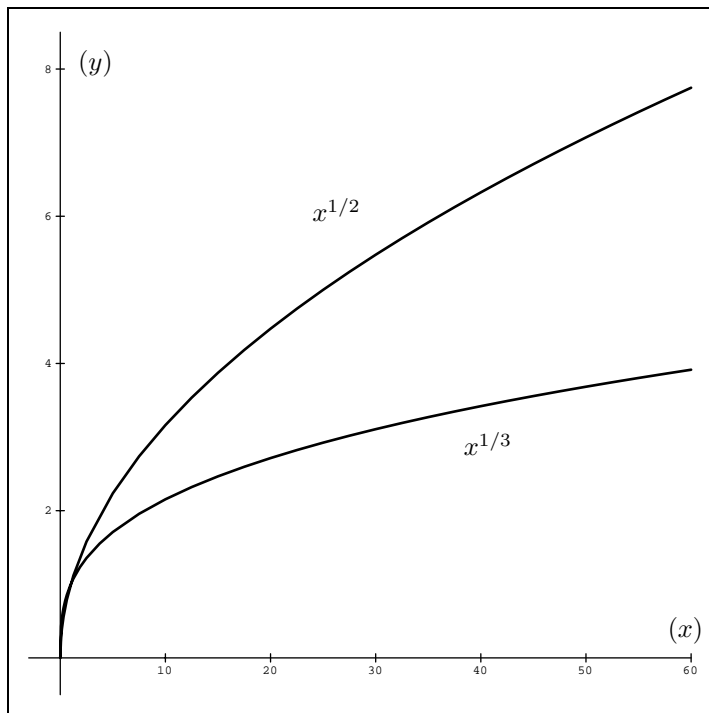


FIG. 3:
 $x \rightarrow x^{1/3}$ ist von kleinerer
 Grössenordnung als $x \rightarrow x^{1/2}$

Beispiel Die Funktionen $x \rightarrow x$, $x \rightarrow 2x$, $x \rightarrow x + c$ sind von “gleicher” Grössenordnung; keine der Funktionen ist von kleinerer Grössenordnung als eine der anderen.

Beispiel Es gilt $x^{1/3} = o(x^{1/2})$ für $x \rightarrow \infty$ (siehe Figur 3), denn

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1/3}}{x^{1/2}} = 0 .$$

Die oben eingeführte Sprechweise kann laut Definition auf beliebigen Funktionen angewandt werden; es ist dafür nicht notwendig, dass die Funktionswerte für $x \rightarrow \infty$ gegen ∞ streben. Auch dazu einige Beispiele.

Beispiel Es gilt $1/x^3 = o(1/x^2)$ für $x \rightarrow \infty$, denn

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x^3}{1/x^2} = 0$$

Beispiel Für $k > 0$, gilt $1/x^k = o(1)$.

Von besonderem Interesse sind in diesem Zusammenhang die Exponential- und Logarithmusfunktionen. Hier gilt der wichtige Satz (siehe Figur 4):

Satz Es gilt $x^k = o(e^x)$ für $x \rightarrow \infty$.

Man kann den Inhalt dieses Satzes auch so ausdrücken: die Exponentialfunktion $x \rightarrow e^x$ strebt für $x \rightarrow \infty$ “stärker” gegen ∞ als jede Potenzfunktion $x \rightarrow x^k$. (Dies ist natürlich nur für $k > 0$ von wirklichem Interesse; für $k < 0$ strebt ja $x \rightarrow x^k$ für $x \rightarrow \infty$ gegen 0, so dass die Aussage des Satzes für $k < 0$ trivialerweise richtig ist.)

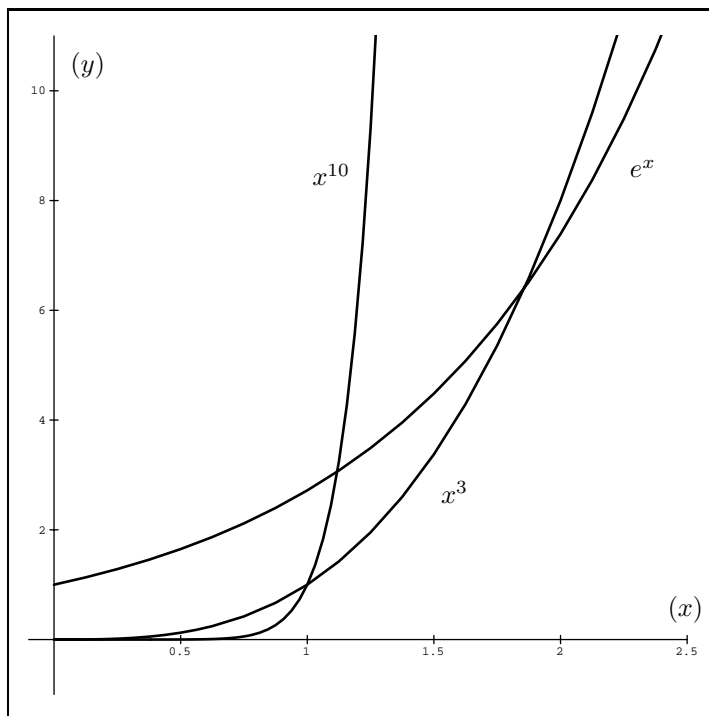


FIG. 4:
Der Eindruck trügt: sowohl
 $x \rightarrow x^3$ wie auch $x \rightarrow x^{10}$ sind
von kleinerer Grössenordnung
als $x \rightarrow e^x$!
(siehe Figuren 5,6)

Beweis Zum Beweis bestimmen wir zuerst die Ableitung von $x \rightarrow x^k/e^x$. Es gilt

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^k}{e^x} \right) = \frac{kx^{k-1}e^x - x^k e^x}{e^{2x}} = \frac{x^{k-1}(k - x)}{e^x}.$$

Für $x > k$ ist die Ableitung negativ, so dass die Funktion $x \rightarrow x^k/e^x$ in diesem Bereich monoton fallend ist. Andererseits ist x^k/e^x für $x > 0$ stets positiv. Daraus folgt, dass der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{e^x}$$

existieren muss. Es bleibt also zu zeigen, dass sein Wert 0 ist. Dabei dürfen wir uns auf ganzzahlige Werte von k beschränken. Ist nämlich $n \leq k < n+1$ für ganzzahliges n , so gilt für $x > 1$

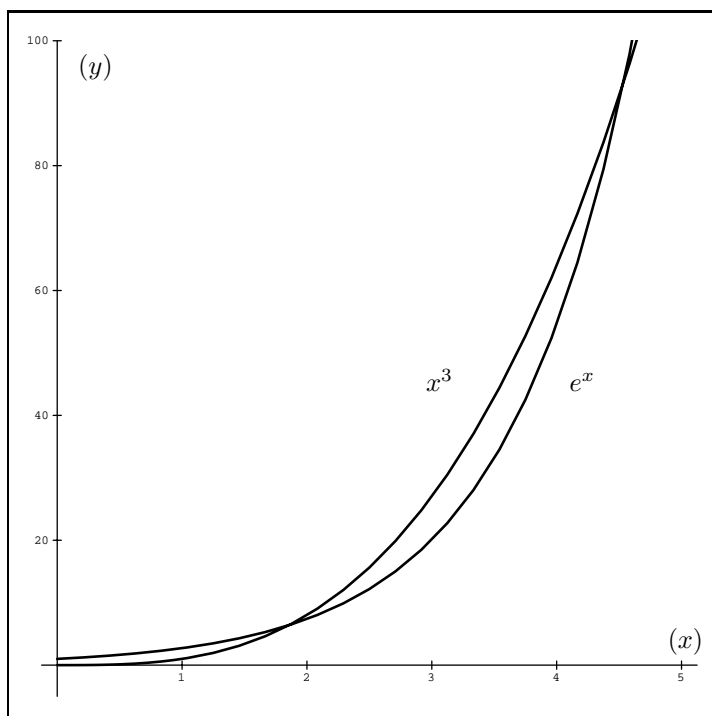


FIG. 5:
Die Graphen von $x \rightarrow x^3$ und
 $x \rightarrow e^x$ schneiden sich im
Intervall $4 < x < 5$ noch einmal.

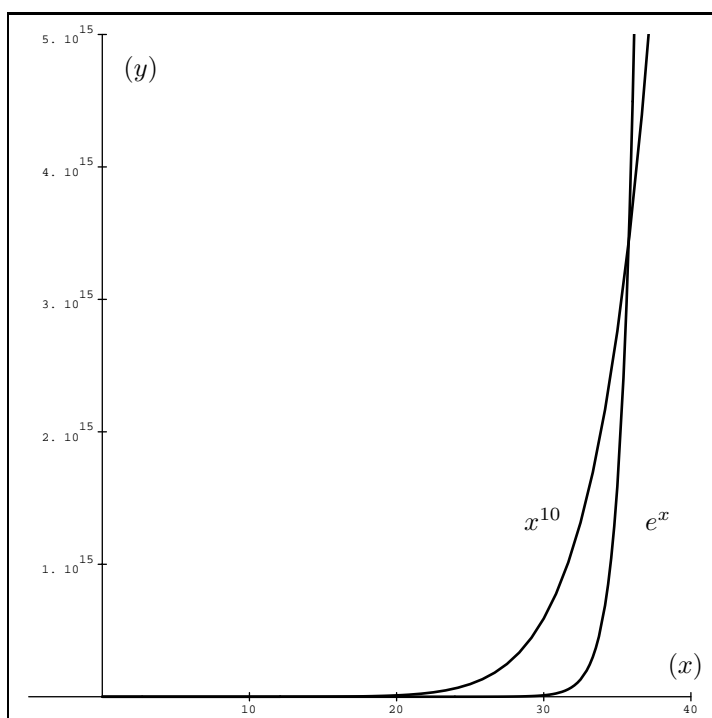


FIG. 6:
Die Graphen von $x \rightarrow x^{10}$ und
 $x \rightarrow e^x$ schneiden sich im
Intervall $30 < x < 40$ noch
einmal.

$$\frac{x^n}{e^x} \leq \frac{x^k}{e^x} < \frac{x^{n+1}}{e^x}$$

und damit

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{e^x} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{e^x} .$$

Die Tatsache, dass für ganzzahliges n

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

gilt, beweisen wir mit Induktion nach n . Für $n = 0$ ist die Aussage trivialerweise richtig:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^0}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0 .$$

Es sei also $n \geq 1$. Da für jede reelle Zahl c mit x auch $x + c$ gegen ∞ strebt, haben wir

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+c)^n}{e^{x+c}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n + ncx^{n-1} + \dots + c^n}{e^x \cdot e^c} \\ &= \frac{1}{e^c} \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} + nc \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{n-1}}{e^x} + \dots + c^n \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} \right) \\ &= \frac{1}{e^c} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} , \end{aligned}$$

denn nach Induktion gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^m}{e^x} = 0$$

für $m < n$. Aus der obigen Gleichung ergibt sich

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} \left(1 - \frac{1}{e^c} \right) = 0 ,$$

woraus folgt, da die Klammer nicht verschwindet,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 .$$

Damit ist der Satz bewiesen.

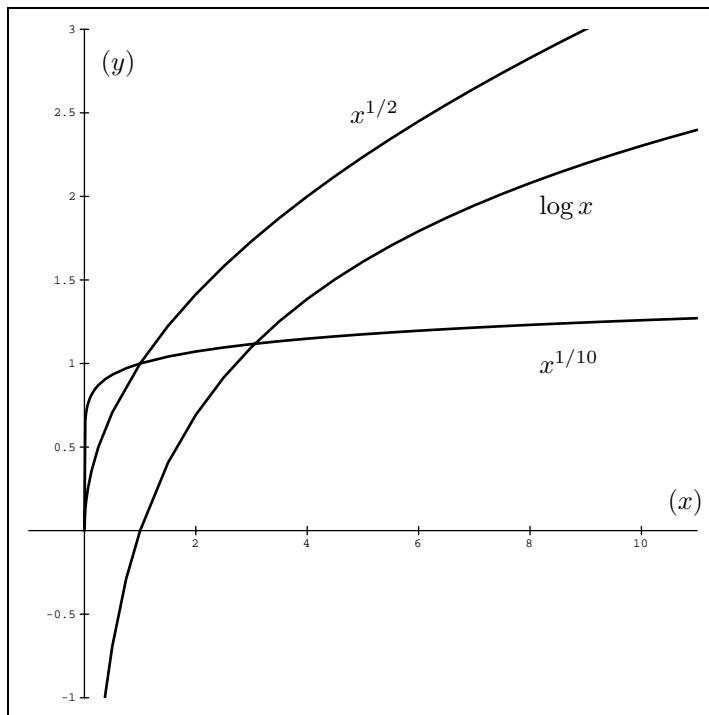


FIG. 7:
Die Logarithmusfunktion
 $x \rightarrow \log x$ ist von kleinerer
Grössenordnung als $x \rightarrow x^{1/2}$
und $x \rightarrow x^{1/10}$.

Vergleicht man Potenz- und Logarithmusfunktionen, so gilt (siehe Figur 7)

Satz Für $k > 0$ gilt $\log x = o(x^k)$ für $x \rightarrow \infty$.

Beweis

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^k} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{(e^t)^k} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t^{1/k}}{e^t} \right)^k = 0.$$

Letzteres nach dem obigen Satz.

Ebenfalls aus dem ersten Satz folgt das nächste Resultat, welches sich mit Funktionen beschäftigt, die für $x \rightarrow \infty$ gegen 0 streben.

Satz Für $k > 0$ gilt $e^{-x} = o(x^{-k})$ für $x \rightarrow \infty$.

Beweis

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}}{x^{-k}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{e^x} = 0.$$

Schliesslich bemerken wir, dass sich die Landau-Symbolik nicht nur für $x \rightarrow \infty$ verwenden lässt, sondern auch für $x \rightarrow a^+$, wo a ein endlicher Wert ist. Sind f und g zwei auf dem Intervall (a, b)

definierte Funktionen, so heisst f für $x \rightarrow a^+$ **von kleinerer Grössenordnung** als g , wenn gilt

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 .$$

In Zeichen drücken wir diesen Sachverhalt wiederum durch das Landau-Symbol aus

$$f(x) = o(g(x)) \text{ für } x \rightarrow a^+ .$$

Als Beispiel betrachten wir die Funktionen $x \rightarrow \log x$ und $x \rightarrow -x^{-k}$, $k > 0$, welche für $x \rightarrow 0^+$ gegen $-\infty$ streben. Es gilt

Satz Für $k > 0$ gilt $\log x = o(-x^{-k})$ für $x \rightarrow 0^+$.

Beweis Wiederum folgt dies auf einfache Weise aus unserem ersten Satz:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{-x^{-k}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log(e^{-t})}{-(e^{-t})^{-k}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-t}{-(e^{-t})^{-k}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t^{1/k}}{e^t} \right)^k = 0 .$$

Man kann sich diese Resultate leicht merken: In all diesen Sätzen verhält sich die Exponentialfunktion extremer als die Potenzfunktion und diese extremer als die Logarithmusfunktion.

Analoge Resultate gelten auch für die Funktion $x \rightarrow a^x$, $a > 0$ anstelle von $x \rightarrow e^x$ und $x \rightarrow {}^a \log x$ anstelle von $x \rightarrow \log x$. Sie lassen sich leicht aus den obigen Sätzen herleiten, indem man die wohlbekannten Beziehungen

$$a^x = e^{\log a \cdot x}$$

$${}^a \log x = \frac{\log x}{\log a}$$

benützt. Wir überlassen die Details dem Leser.