

3 Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Wir führen zuerst den Begriff des **lokalen Extremums** ein. Eine Funktion $f : x \rightarrow f(x)$ mit Definitionsbereich $D(f)$ besitzt in $\xi \in D(f)$ eine *lokale Maximalstelle*, wenn es ein Intervall (c, d) gibt mit $c < \xi < d$, so dass für alle x aus $D(f)$ mit $c < x < d$ gilt $f(x) \leq f(\xi)$. Der Wert $f(\xi)$ heisst dann ein *lokales Maximum* von f . Analog ist eine *lokale Minimalstelle* und ein *lokales Minimum* definiert. Unter einer lokalen Extremalstelle versteht man eine lokale Maximalstelle oder eine lokale Minimalstelle, und man spricht in analoger Weise von einem lokalen Extremum.

Es zeigt sich, dass lokale Extremalstellen von differenzierbaren Funktionen, falls sie im Innern des Definitionsbereiches liegen, mit Hilfe der Differentialrechnung entdeckt werden können.

Satz Es sei $f : x \rightarrow f(x)$ eine auf dem Intervall (a, b) definierte differenzierbare Funktion, die in ξ , $a < \xi < b$ ein lokales Extremum besitzt. Dann gilt $f'(\xi) = 0$.

Beweis Wir zeigen, dass die Annahme $f'(\xi) > 0$ zu einem Widerspruch führt (in analoger Weise führt auch $f'(\xi) < 0$ zu einem Widerspruch). Definitionsgemäss gilt

$$f'(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}.$$

Es sei nun $f'(\xi) > 0$. Dann folgt nach der Definition des Limes, dass für alle genügend nahe bei ξ liegenden x gilt

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} > 0.$$

Für diese Werte x hat also $f(x) - f(\xi)$ dasselbe Vorzeichen wie $x - \xi$. Für x -Werte mit $x - \xi > 0$ gilt somit $f(x) > f(\xi)$ und für x -Werte mit $x - \xi < 0$ gilt $f(x) < f(\xi)$. Damit besitzt f in ξ weder ein lokales Maximum noch ein lokales Minimum. Dies steht im Widerspruch zur Voraussetzung.

Aus dieser Aussage ergibt sich leicht der sogenannte **Satz von Rolle** (M. Rolle 1652 - 1719) (siehe Figur 1):

Satz Es sei $f : x \rightarrow f(x)$ eine differenzierbare Funktion mit $f(x_1) = 0 = f(x_2)$, $x_1 < x_2$. Dann gibt es mindestens ein ξ , $x_1 < \xi < x_2$ mit $f'(\xi) = 0$.

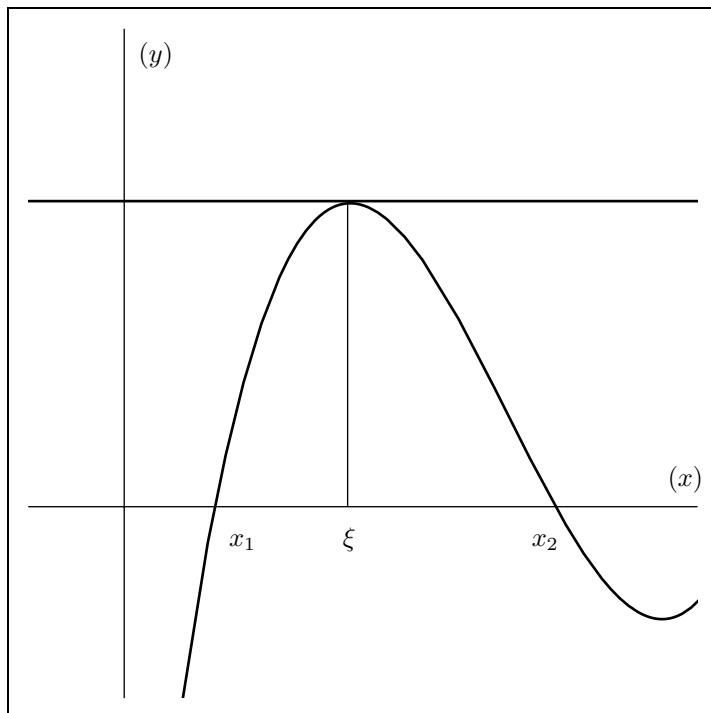


FIG. 1:
Zum Satz von Rolle

Beweis Ist $f(x) \equiv 0$ für $x_1 \leq x \leq x_2$, so ist nichts zu beweisen, denn dann gilt $f'(x) = 0$ für alle x , $x_1 \leq x \leq x_2$. Wir dürfen also annehmen, dass f im Intervall $[x_1, x_2]$ von Null verschiedene Werte annimmt. Aber dann nimmt f in einem inneren Punkt ξ , $x_1 < \xi < x_2$ ein Extremum an. Nach obigem folgt dann $f'(\xi) = 0$. (Die Aussage, dass f in einem Punkt des Intervalles $[x_1, x_2]$ ein Extremum annimmt, ist zwar sehr plausibel, sie müsste aber natürlich mathematisch bewiesen werden. Ein solcher Beweis würde etwas mehr mathematisches Grundlagenwissen benötigen, als wir in dieser Vorlesung zur Verfügung haben. Die Aussage folgt aus der Stetigkeit der Funktion f . Wir erwähnen schliesslich, dass man leicht Funktionen konstruieren kann, die zwar in allen Punkten des Intervalles $[x_1, x_2]$ definiert sind, die aber in diesem Intervall kein Extremum annehmen; diese Funktionen sind dann natürlich notwendigerweise *nicht* stetig.)

Bemerkung Ist f auch nur in einem Punkt des Intervalles $[x_1, x_2]$ *nicht* differenzierbar, so braucht kein ξ der verlangten Art zu existieren.

Der folgende Satz, der **Mittelwertsatz der Differentialrechnung** ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Rolle (siehe Figur 2).

Satz Es sei $f : x \rightarrow f(x)$ eine im Intervall $[x_1, x_2]$ definierte differenzierbare Funktion. Dann gibt es (mindestens) ein ξ , $x_1 < \xi < x_2$ mit

$$f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1)$$

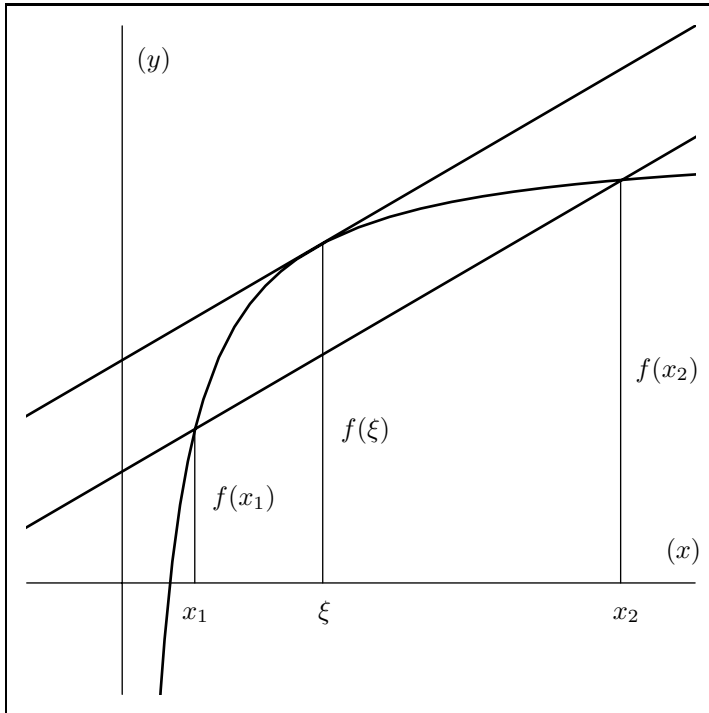


FIG. 2:
Zum Mittelwertsatz der
Differentialrechnung

Beweis Wir betrachten die Funktionen

$$g : x \rightarrow g(x) = f(x) - \left(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1) + f(x_1) \right) .$$

Offensichtlich gilt $g(x_1) = 0 = g(x_2)$, und g ist differenzierbar. Nach dem Satz von Rolle gibt es dann ein ξ , $x_1 < \xi < x_2$ mit $g'(\xi) = 0$; aber

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} ,$$

so dass folgt

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} .$$

Dies war zu beweisen.

Wir werden den Mittelwertsatz der Differentialrechnung an verschiedenen Stellen in der Vorlesung brauchen können. Gleich hier schliessen wir noch zwei instruktive Anwendungen an.

Folgerung Es sei $f : x \rightarrow f(x)$ eine im Intervall $[a, b]$ definierte differenzierbare Funktion mit $f'(x) \geq 0$ (bzw. $f'(x) > 0$) für alle $a \leq x \leq b$. Dann ist f im Intervall (strikt) monoton wachsend.

Beweis Es seien x_1, x_2 zwei beliebige Stellen des Definitionsintervalles. Dann gibt es nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein ξ zwischen x_1 und x_2 mit

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) .$$

Aus $f'(\xi) \geq 0$ (bzw. $f'(x) > 0$) folgt dann $f(x_2) \geq f(x_1)$ (bzw. $f(x_2) > f(x_1)$).

Regel von Bernoulli-Hôpital (Johann Bernoulli 1667-1748, G. F. A. de l'Hôpital 1661-1704) Es seien $f : x \rightarrow f(x)$ und $g : x \rightarrow g(x)$ zwei auf dem Intervall $[a, b]$ definierte differenzierbare Funktionen mit $f(a) = 0 = g(a)$. Ferner sei $g'(x) \neq 0$ für $a < x < b$. Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Beweis Wir wählen X mit $a < X < b$ und betrachten die Funktion

$$h : x \rightarrow h(x) = f(x)g(X) - f(X)g(x) .$$

Natürlich gilt $h(a) = 0 = h(X)$. Nach dem Satz von Rolle existiert dann ξ , $a < \xi < X$ mit $h'(\xi) = 0$. Es folgt

$$0 = h'(\xi) = f'(\xi)g(X) - f(X)g'(\xi)$$

und damit

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(X)}{g(X)} , \quad a < \xi < X .$$

Lässt man schliesslich in dieser Beziehung X gegen a streben, so erhält man die Behauptung.

Beispiel

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\cos x} = 2 .$$

Beispiel

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\log x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x}{1/x} = e .$$

Beispiel

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \sin x}{x \sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{2 \cos x - x \sin x} \right) = 0 .$$