

## 2 Linearisieren, Fehlerrechnung

Es sei  $f : x \rightarrow f(x)$  eine differenzierbare Funktion,  $x_0 \in D(f)$ . Unter der **linearen Ersatzfunktion von  $f$  in  $x_0$**  versteht man die lineare Funktion

$$x \rightarrow f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) .$$

Der Graph der linearen Ersatzfunktion von  $f$  in  $x_0$  ist somit gerade die Tangente an den Graphen von  $f$  im Punkt  $(x_0, f(x_0))$ . Der Vorgang, welcher die Funktion  $f$  durch die lineare Ersatzfunktion von  $f$  in  $x_0$  ersetzt, heisst **Linearisieren in  $x_0$** .

**Beispiel** Die lineare Ersatzfunktion von  $f : x \rightarrow \sin x$  in  $x_0 = 0$  ist

$$x \rightarrow f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = x ,$$

denn es gilt  $\sin'(0) = \cos(0) = 1$ ,  $\sin(0) = 0$ . Die lineare Ersatzfunktion von  $f : x \rightarrow \sin x$  in  $x_0 = \pi/3$  ist (siehe Figur 1)

$$x \rightarrow \frac{1}{2} \left( x - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}x + \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \right) ,$$

denn es gilt

$$\sin' \left( \frac{\pi}{3} \right) = \cos \left( \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}, \quad \sin \left( \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

Die Figur lässt vermuten, dass die lineare Ersatzfunktion von  $f : x \rightarrow f(x)$  in  $x_0$ , in der Umgebung des Wertes  $x_0$  eine gute Approximation für die Funktion  $f$  ist. Dies ist in der Tat der Fall und lässt sich mathematisch wie folgt ausdrücken. Wir setzen

$$\varphi(x) = f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)) ,$$

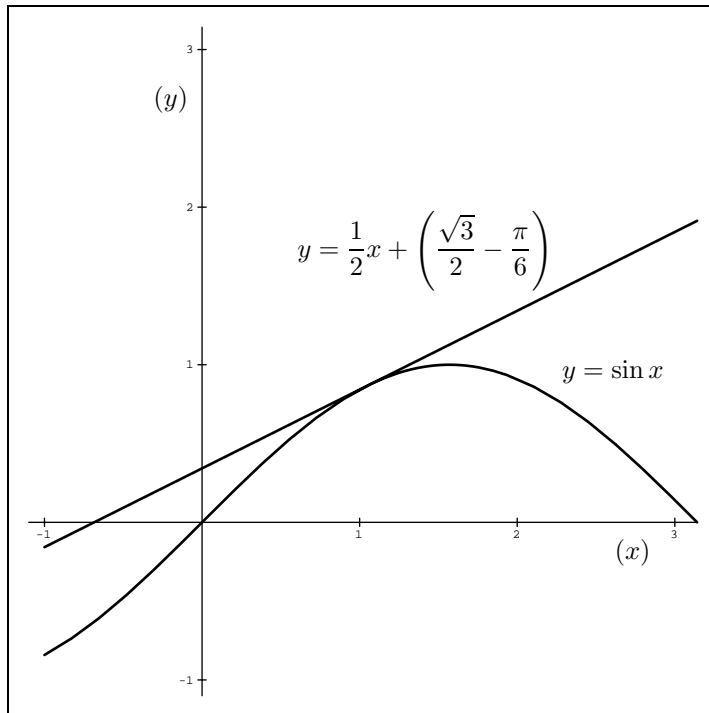


FIG. 1:  
Die lineare Ersatzfunktion von  
 $f : x \rightarrow \sin x$  in  $x_0 = \pi/3$

so dass  $\varphi$  die Differenz zwischen der Funktion  $f$  und deren linearen Ersatzfunktion in  $x_0$  beschreibt. Je kleiner  $|\varphi(x)|$  ist, umso besser wird  $f(x)$  durch den Wert der linearen Ersatzfunktion approximiert. Natürlich gilt  $\varphi(x_0) = 0$ . Setzen wir wie üblich  $\Delta x = x - x_0$ , so erhalten wir

$$\frac{\varphi(x)}{\Delta x} = \frac{\varphi(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) .$$

Betrachten wir jetzt den Grenzübergang  $x \rightarrow x_0$  (oder  $\Delta x \rightarrow 0$ ), so folgt

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{\Delta x} = 0 .$$

Dies bedeutet anschaulich, dass für  $x \rightarrow x_0$  nicht nur  $\varphi(x)$  gegen Null geht (was nach obigem klar ist), sondern dass  $\varphi(x)$  *stärker gegen Null geht als*  $\Delta x$ . Es geht nämlich sogar der Quotient  $\varphi(x)/\Delta x$  gegen Null. In der Tat ist also die lineare Ersatzfunktion von  $f$  in  $x_0$  in der Umgebung von  $x_0$  eine gute Approximation für  $f$ ; eine umso bessere, je näher  $x$  bei  $x_0$  liegt.

Die Tatsache, dass der Quotient  $\varphi(x)/\Delta x$  für  $\Delta x \rightarrow 0$  gegen Null strebt, werden wir später dadurch ausdrücken, dass wir sagen “ $\varphi(x)$  ist für  $x \rightarrow x_0$  von kleinerer Grössenordnung als  $\Delta x = x - x_0$ ”. Wir werden dies durch das Symbol

$$\varphi(x) = o(x - x_0) \quad \text{für } x \rightarrow x_0$$

beschreiben.

Beim Arbeiten mit der linearen Ersatzfunktion hat es sich eingebürgert, ein neues, aus dem alten durch Parallelverschiebung gewonnenes Koordinatensystem mit dem neuen Ursprung im Punkte  $(x_0, f(x_0))$  einzuführen. Man benennt die Achsen des neuen Koordinatensystems mit  $dx$  und  $df$ . Die lineare Ersatzfunktion von  $f$  in  $x_0$ , die wir jetzt  $df$  nennen, stellt sich in diesem neuen Koordinatensystem auf sehr einfache Weise dar

$$df : dx \rightarrow f'(x_0) \cdot dx .$$

Die Approximationseigenschaft lässt sich dann durch

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) \sim df .$$

ausdrücken. In diesem Zusammenhang heisst die lineare Ersatzfunktion auch **Differential** der Funktion  $f$  in  $x_0$ .

**Beispiel** Die lineare Ersatzfunktion von

$$f : x \rightarrow (1 + x)^\alpha$$

in  $x_0 = 0$  ist

$$x \rightarrow \alpha(1 + x_0)^{\alpha-1}(x - x_0) + (1 + x_0)^\alpha = 1 + \alpha x .$$

Unser Resultat besagt, dass  $1 + \alpha x$  für  $x$  nahe bei  $x_0 = 0$  eine gute Approximation für  $(1 + x)^\alpha$  ist, und zwar ist der Fehler  $|\varphi(x)|$  im Vergleich mit  $|x|$  “verschwindend klein”, wenn nur  $|x|$  genügend klein ist.

Insbesondere gelten für  $|x| \ll 1$  die Beziehungen (siehe Figuren 2,3,4)

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &\sim 1 + \frac{1}{2}x , \\ \frac{1}{\sqrt{1+x}} &\sim 1 - \frac{1}{2}x , \\ \frac{1}{1+x} &\sim 1 - x . \end{aligned}$$

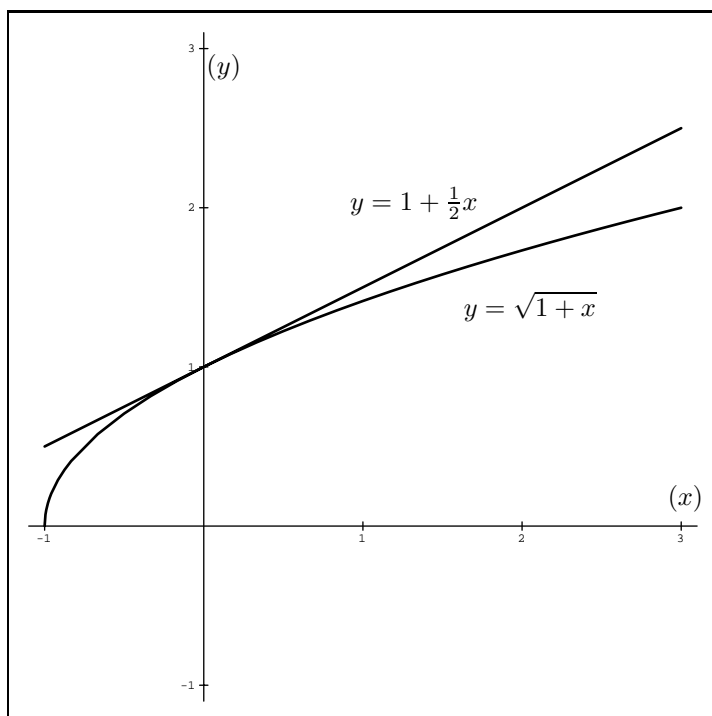


FIG. 2:  
Die lineare Ersatzfunktion von

$$f : x \rightarrow \sqrt{1+x}$$

im Punkte  $x_0 = 0$

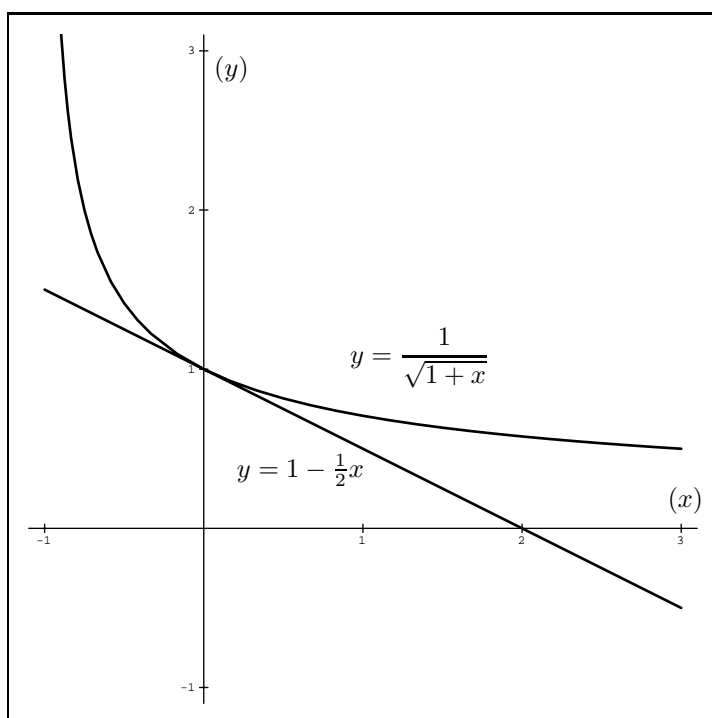


FIG. 3:  
Die lineare Ersatzfunktion von

$$f : x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

im Punkte  $x_0 = 0$

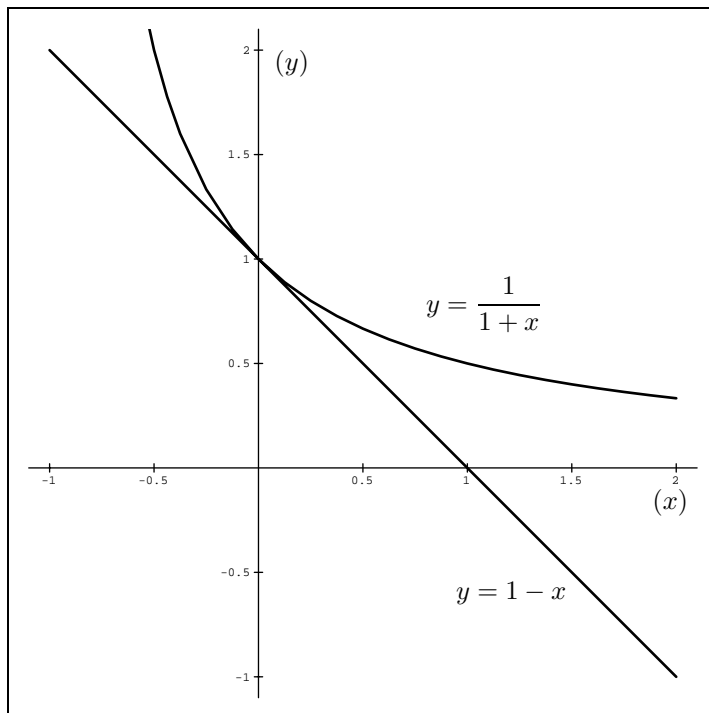


FIG. 4:  
Die lineare Ersatzfunktion von

$$f : x \rightarrow \frac{1}{1+x}$$

im Punkte  $x_0 = 0$

Von letzterer Approximation macht man im täglichen Leben oft Gebrauch: Eine Ware, die  $A$  Franken kostet, kostet nach einem Preisaufschlag von 2%  $B$ ,  $B = A(1 + 2/100)$  Franken. Geht man vom neuen Preis aus, so gilt  $A = B/(1 + 2/100)$ . Folglich ist es falsch zu sagen, dass die Ware vor dem Aufschlag um 2% billiger war, aber jedermann weiss, dass dies *annähernd* richtig ist. In der Tat gilt

$$A = B / \left(1 + \frac{2}{100}\right) \sim B \left(1 - \frac{2}{100}\right) .$$

Jedermann ist sich auch bewusst, dass für grössere Prozentzahlen die analoge Approximation nicht mehr genügend gut ist.

Die Technik des Linearisierens wird bei der mathematischen Behandlung von Problemen der Natur- und Ingenieurwissenschaften sehr häufig angewendet. Die in solchen Problemen auftretenden Grössen werden nämlich in der Regel durch komplizierte und vielfach gar nicht genau bekannte Funktionen beschrieben. Man denke etwa an die Reibungskräfte auf einer rauhen Oberfläche oder an die Spanungskräfte, die in einem Balken auftreten, wenn dieser bis zum Bruch belastet wird. In der mathematischen Behandlung ersetzt man deshalb die komplizierten Funktionen sehr oft durch einfachere Approximationen; als erste grobe Näherung bietet sich

dabei die *lineare Ersatzfunktion* an. Man *linearisiert* das Problem und betrachtet die *linearisierte Theorie*. Dadurch wird das Problem mathematisch nicht nur einfacher zu fassen, sondern in vielen Fällen ist erst die linearisierte Theorie einer vollständigen mathematischen Behandlung überhaupt zugänglich. Diese liefert zwar nur eine erste Näherung, aber diese reicht für praktische Zwecke oft aus.

**Beispiel** Die Rückstellkraft  $K$  eines mathematischen Pendels der Länge  $l$  und der Masse  $m$  ist durch

$$K = mg \sin \varphi$$

gegeben, wobei  $g$  die Erdbeschleunigung bezeichnet. Wie wir später sehen werden, bereitet die mathematische Behandlung des mathematischen Pendels erhebliche Schwierigkeiten, wenn man für die Rückstellkraft diese Formel verwendet. Man betrachtet deshalb die linearisierte Theorie, die man dadurch erhält, dass man die Funktion

$$\varphi \rightarrow K = mg \sin \varphi$$

durch ihre lineare Ersatzfunktion in  $\varphi_0 = 0$  ersetzt,

$$\varphi \rightarrow mg\varphi .$$

Der Wert  $\varphi_0 = 0$  entspricht der Ruhelage des Pendels. Anschaulich gesagt, beschränkt man sich auf *kleine* Auslenkungen des Pendels,  $\varphi \ll 1$ , und benützt, dass für kleine Werte von  $\varphi$  die komplizierte Funktion  $\varphi \rightarrow mg \sin \varphi$  gut durch ihre lineare Ersatzfunktion in  $\varphi_0 = 0$ , d.h. durch  $\varphi \rightarrow mg\varphi$  approximiert wird. Die linearisierte Theorie des mathematischen Pendels lässt sich auf eine einfache Weise mathematisch darstellen und durchrechnen (siehe später). Es zeigt sich darüber hinaus, dass die so erhaltene Näherung für die meisten praktischen Zwecke völlig genügt.

Eine weitere wichtige Anwendung der Technik des Linearisierens ist die sogenannte **Fehlerrechnung**. Dabei geht es um das Problem, dass in der Praxis die Werte der Ausgangsgrößen einer Rechnung im allgemeinen nicht genau bekannt sind. Oft handelt es sich ja um Messwerte, die naturgemäss nur bis auf eine gewisse Genauigkeit bestimmt werden können, und deshalb mit (Mess-)Fehlern behaftet sind. Im Laufe einer Rechnung pflanzen sich diese Fehler fort und beeinflussen das Schlussresultat. Der Leser wird sich erinnern, dass wir eine ähnliche Fragestellung diskutiert haben, als wir den Begriff der Stetigkeit von Funktionen eingeführt haben. Während wir aber damals qualitative Aussagen in den Vordergrund stellten, sind wir jetzt an quantitativen Aussagen interessiert, nämlich an einer Abschätzung des Fehlers im Schlussresultat. Die

Fehlerrechnung leistet gerade dies, und zwar indem die lineare Ersatzfunktion herangezogen wird.

**Beispiel** In einem Dreieck seien die Seite  $a$  und der Winkel  $\alpha$  genau bekannt. Der Winkel  $\beta$  wird gemessen, wobei der Messfehler kleiner als  $\Delta\beta$  ist. Wie wirkt sich dieser Messfehler bei der Berechnung der Länge der Seite  $b$  aus?

Nach dem Sinus-Satz gilt

$$b = \frac{a}{\sin \alpha} \sin \beta .$$

Betrachten wir  $b$  als Funktion von  $\beta$ ,  $b = f(\beta)$ , und vergleichen wir die Funktionswerte  $f(\beta + \Delta\beta)$  und  $f(\beta)$ , so gilt nach obigem

$$\Delta f = f(\beta + \Delta\beta) - f(\beta) \sim df = f'(\beta) d\beta ,$$

wobei wir rechts statt  $\Delta\beta$  konsequenterweise  $d\beta$  geschrieben haben. Für das Differential  $df$  erhalten wir

$$df = \frac{a}{\sin \alpha} \cos \beta d\beta ,$$

was eine Abschätzung des *absoluten Fehlers*  $|\Delta f|$  erlaubt. In den Anwendungen interessanter ist allerdings gewöhnlich der *relative Fehler*. Darunter versteht man den Quotienten  $df/f$ . In unserem Fall erhalten wir

$$\frac{df}{f} = \cot \beta d\beta .$$

Für *kleine*  $\beta$ 's wird der relative Fehler also gross.

**Beispiel** Man möchte die Oberfläche  $O$  und das Volumen  $V$  einer Kugel aus der einzigen wirklich messbaren Grösse, nämlich dem Durchmesser  $x$  der Kugel bestimmen. Wie wirken sich Messfehler aus?

Es gelten bekanntlich die Formeln

$$V = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{x}{2}\right)^3 ,$$

$$O = 4\pi \left(\frac{x}{2}\right)^2 .$$

Daraus folgt für die absoluten Fehler

$$\begin{aligned}dV &= \frac{4\pi}{3} \frac{3}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 dx = 2\pi \left(\frac{x}{2}\right)^2 dx , \\dO &= 4\pi \frac{x}{2} dx = 2\pi x dx\end{aligned}$$

und für die relativen Fehler

$$\begin{aligned}\frac{dV}{V} &= 3 \frac{dx}{x} , \\ \frac{dO}{O} &= 2 \frac{dx}{x} .\end{aligned}$$

Wir überlassen es dem Leser, für die Berechnung des relativen Fehlers, etwa bei Potenzfunktionen, Rechenregeln zu finden.