

## 4 Extremalaufgaben

Extremalaufgaben sind von der Schule her wohlbekannt. Wir begnügen uns deshalb hier mit einigen Präzisierungen und Beispielen. Zuerst zur Definition eines Extremums.

Es sei  $g : x \rightarrow g(x)$  eine auf dem Intervall  $[a, b]$  definierte Funktion. Man sagt,  $x_0 \in [a, b]$  sei eine **globale Maximalstelle**, wenn für alle  $x \in [a, b]$  gilt

$$g(x_0) \geq g(x).$$

Der Wert  $g(x_0)$  heisst dann **globales Maximum** der Funktion  $g$  in  $[a, b]$ . Der Punkt  $x_0 \in [a, b]$  heisst eine lokale Maximalstelle, wenn ein  $x_0$  enthaltendes Intervall  $(c, d)$  existiert, so dass für alle  $x$  aus  $[a, b]$ , die auch in  $(c, d)$  liegen, gilt

$$g(x_0) \geq g(x).$$

Der Wert  $g(x_0)$  heisst in diesem Fall ein lokales Maximum der Funktion  $g$ . Analog werden die Begriffe globale Minimalstellen, globales Minimum, lokale Minimalstelle, lokales Minimum definiert. Maximum und Minimum fasst man unter dem Begriff **Extremum** zusammen.

Es ist ein wesentlicher Erfolg der Differentialrechnung, dass sie eine effiziente Behandlung von Extremalaufgaben erlaubt. Es gilt das folgende Resultat, das sich leicht aus dem ersten Satz des Abschnittes 3 ergibt:

Es sei  $g : x \rightarrow g(x)$ ,  $D(g) = [a, b]$  gegeben. Ist  $x_0$  eine lokale Extremalstelle der Funktion  $g$ , so ist

- $x_0$  ein Randpunkt des Definitionsintervalls,  
oder
- die Ableitung von  $g$  in  $x_0$  ist nicht definiert,  
oder
- die Ableitung von  $g$  ist definiert, und es gilt  $g'(x_0) = 0$ .

Um die globale Extremalstelle einer Funktion zu finden, kann man demzufolge wie folgt vorgehen: Man macht sich eine Liste von Kandidaten für die lokalen Extremalstellen, d.h. eine Liste bestehend aus

- den Randpunkten des Definitionsintervalls,
- den Punkten  $x_0$ , in denen die Ableitung  $g'$  nicht definiert ist,
- den Punkten  $x_0$ , in denen  $g'(x_0) = 0$  gilt.

Man berechne dann die Funktionswerte von  $g$  in diesen (üblicherweise endlich vielen) Punkten und finde die Extremalstelle durch Vergleich der Funktionswerte.

Zur Präzisierung mögen noch die folgenden **Bemerkungen** angeführt werden:

Nicht jeder Punkt  $x_0$  mit  $g'(x_0) = 0$  ist Extremalstelle (Beispiel:  $g : x \rightarrow x^3$ ,  $x_0 = 0$ ).

Die zweite Ableitung kann oft herangezogen werden, um zu entscheiden, ob in  $x_0$  mit  $g'(x_0) = 0$  ein Maximum ( $g''(x_0) < 0$ ) oder ein Minimum ( $g''(x_0) > 0$ ) vorliegt. In den meisten Fällen führt aber eine Diskussion des Funktionsverhaltens mit einfacheren Mitteln ebenfalls zum Ziel.

Im übrigen gibt es Fälle, wo auch die zweite Ableitung über die Natur des Extremums *keine* Auskunft gibt. (Beispiel:  $g : x \rightarrow x^4$  hat in  $x_0 = 0$  eine (sogar globale) Minimalstelle, aber es gilt  $g''(x_0) = 0$ .)

**Beispiel** Ein kreisförmiger Querschnitt der Spule eines Transformators soll durch einen kreuzförmigen Querschnitt eines aus Blechen geschichteten Eisenkerns möglichst ausgefüllt werden (siehe Figur 1).

Wir entnehmen der Figur 1, dass die Fläche des Eisenkerns durch

$$A = 4yx + 2 \cdot 2(x - y)y$$

gegeben ist. Setzen wir  $x = r \cos \alpha$ ,  $y = r \sin \alpha$ , so erhalten wir den Flächeninhalt  $A$  in Funktion von  $\alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq \pi/4$

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= 4r^2 \cos \alpha \sin \alpha + 4r^2 (\cos \alpha - \sin \alpha) \sin \alpha \\ &= 4r^2 (2 \cos \alpha \sin \alpha - \sin^2 \alpha). \end{aligned}$$

Nullsetzen der Ableitung liefert

$$\begin{aligned} A'(\alpha) &= 4r^2 (-2 \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha) = 0 \\ 2 \cos(2\alpha) - \sin(2\alpha) &= 0 \\ \tan(2\alpha) &= 2. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich  $\alpha = 31.7^\circ$ , wobei es sich natürlich um *das globale Maximum* handelt, da die Randpunkten des Definitionsbereiches offensichtlich kleinere Werte liefern. Eine weitere

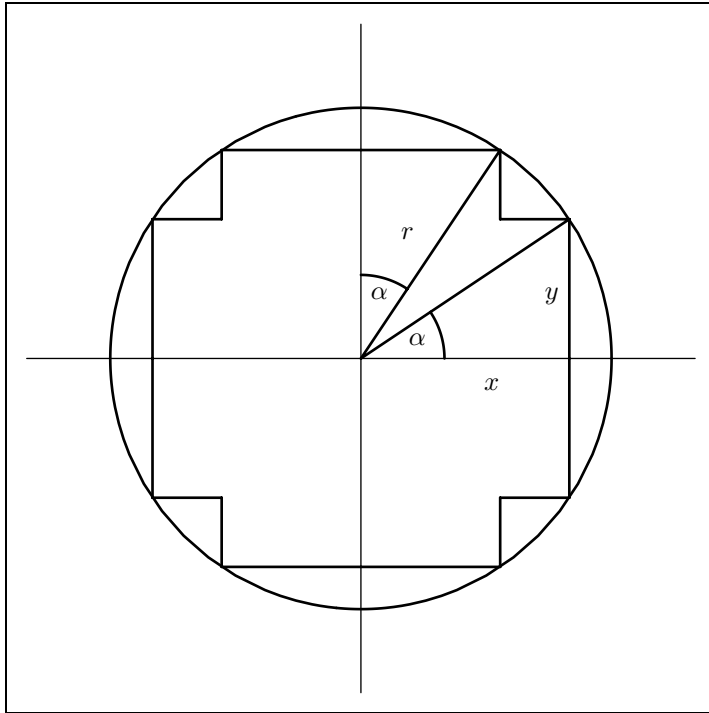


FIG. 1:  
Querschnitt der Spule des  
Transformators

Rechnung zeigt  $x_{max} = 0.851 r$ ,  $y_{max} = 0.526 r$ , also  $A_{max} = 2.47 r^2$ . Der Füllfaktor beträgt dann

$$q = \frac{2.47 r^2}{\pi r^2} = 78.7\%$$

**Beispiel** Gegeben ist die Funktion

$$f : x \rightarrow (x - 1) \sqrt[3]{x^2}, \quad D(f) = \mathbb{R}.$$

Gesucht sind die lokalen und globalen Extrema von  $f$  (soweit sie existieren).

Wie stellen eine Liste der  $x$ -Werte zusammen, die als Kandidaten für eine lokale Extremalstelle auftreten.

- Es gibt keine Randpunkte, da  $D(f) = \mathbb{R}$ .

Die Ableitung von  $f$  ist gegeben durch

$$f'(x) = \frac{5x - 2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Sie ist mit Ausnahme des Nullpunktes überall definiert und Null für  $x = 2/5$ . Die weiteren Kandidaten sind also

- $x = 0$  (Ableitung nicht definiert),
- $x = 2/5$  (Ableitung gleich Null).

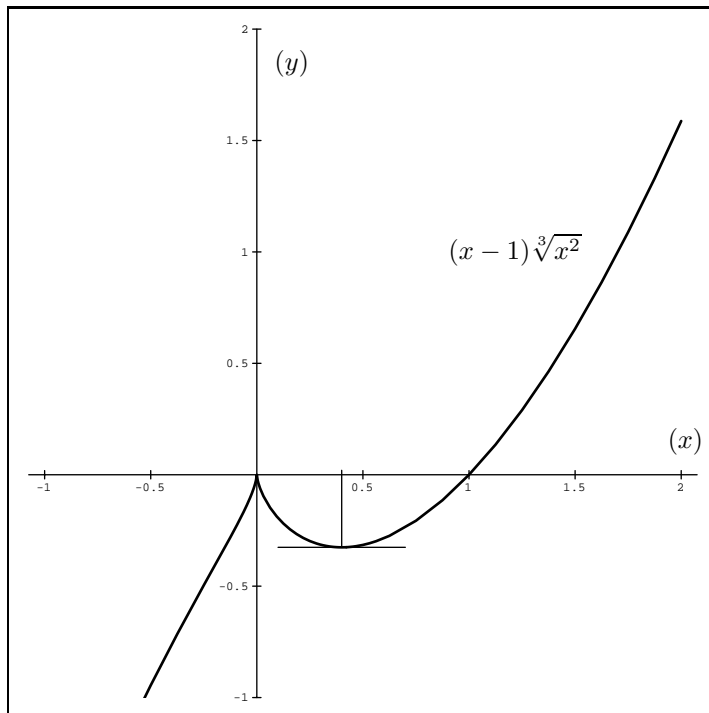


FIG. 2:  
Die Extrema der Funktion  
 $f : x \rightarrow (x - 1)\sqrt[3]{x^2}$

An der Ableitung  $f'(x)$  lesen wir ferner die folgenden Eigenschaften von  $f$  ab.

- Für  $x < 0$  ist die Ableitung positiv, die Funktion  $f$  also strikt monoton wachsend.
- Für  $0 < x < 2/5$  ist die Ableitung negativ, die Funktion  $f$  also strikt monoton fallend.
- Für  $2/5 < x < \infty$  ist die Ableitung positiv, die Funktion  $f$  also strikt monoton wachsend.

Für sehr grosse  $|x|$  verhält sich die Funktion  $f$  wie  $x\sqrt[3]{x^2} = x^{5/3}$ . Damit ist  $x = 0$  eine lokale Maximalstelle von  $f$  und  $f(0) = 0$  ein lokales Maximum; ferner ist  $x = 2/5$  eine lokale Minimalstelle und

$$f\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$$

ein lokales Minimum.

**Beispiel** Gegeben ist die Strecke  $AB$ ,  $A = (-1, 1)$ ,  $B = (0, 2)$ . Ferner bezeichnet  $P = (p, 0)$  einen Punkt auf der  $x$ -Achse. Gesucht ist derjenige Punkt  $Q$  auf der Strecke  $AB$ , welcher von  $P$  einen minimalen Abstand hat (siehe Figur 3).

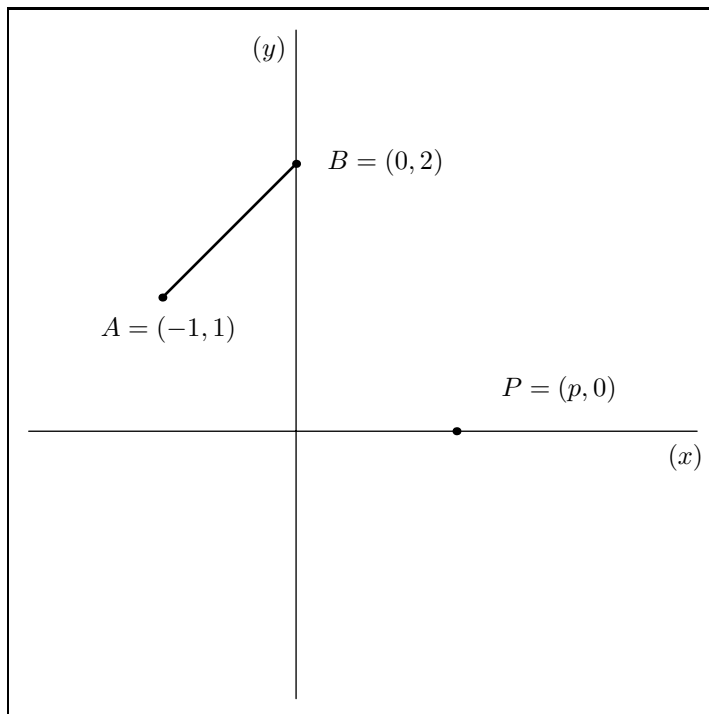


FIG. 3:  
Punkt  $P$  und Strecke  $AB$

Der Leser bemerkt natürlich sofort, dass die Lösung von der Lage des Punktes  $P$  abhängig ist. Wir beschreiben die Strecke  $AB$  durch

$$y = x + 2, \quad -1 \leq x \leq 0$$

und definieren die Funktion  $f$  als das Quadrat des Abstandes  $|QP|$ ,

$$f(x) = d^2 = (p - x)^2 + (x + 2)^2, \quad D(f) = [-1, 0].$$

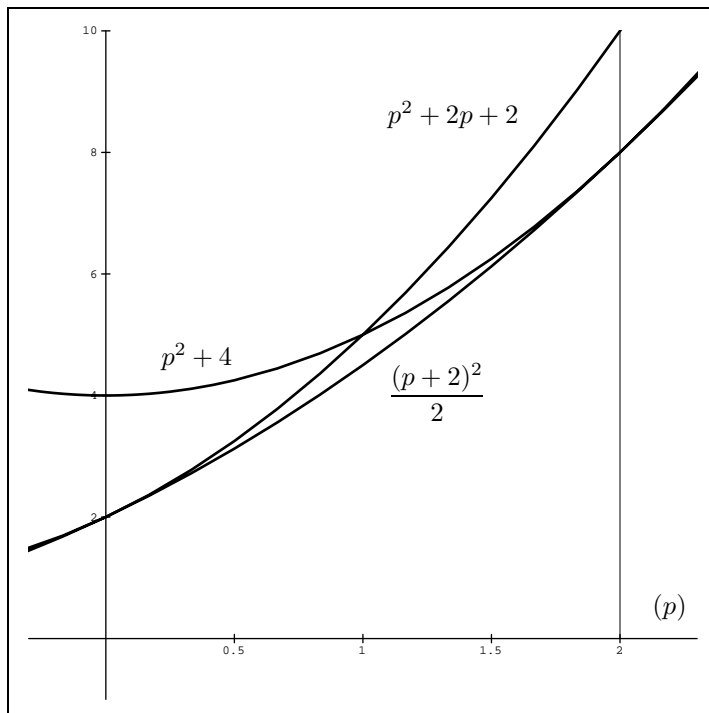


FIG. 4:  
 Quadrat des minimalen  
 Abstandes zwischen  $P$  und der  
 Strecke  $AB$   
 in Funktion von  $p$

Als Kandidaten für die globale Minimalstelle von  $f$  treten einmal die beiden Randpunkte des Definitionsintervalles  $D(f) = [-1, 0]$  auf. Wir erhalten

$$\begin{aligned} f(-1) &= p^2 + 2p + 2, \\ f(0) &= p^2 + 4. \end{aligned}$$

Da die Funktion  $f$  offensichtlich im ganzen Definitionsintervall differenzierbar ist, erhalten wir die weiteren Kandidaten durch Nullsetzen der Ableitung

$$f'(x) = -2(p - x) + 2(x + 2) = -2p + 4x + 4 = 0.$$

Daraus ergibt sich  $x = p/2 - 1$ . Dieser Punkt liegt nur für  $0 \leq p \leq 2$  im Definitionsintervall der Funktion  $f$ ; nur in diesem Fall tritt dieser Kandidat überhaupt auf. Aus  $f''(x) = 4 > 0$  folgt ferner, dass in diesem Punkt eine lokale Minimalstelle vorliegt. Die globale Minimalstelle von  $f$  ist folglich

$$x_{\min} = \begin{cases} -1 & \text{für } p \leq 0 \\ p/2 - 1 & \text{für } 0 \leq p \leq 2 \\ 0 & \text{für } 2 \leq p \end{cases},$$

und das Quadrat des Minimalabstandes  $|QP|$  ist gegeben durch (siehe Figur 4)

$$f(x_{min}) = \begin{cases} p^2 + 2p + 2 & \text{für } p \leq 0 \\ (p+2)^2/2 & \text{für } 0 \leq p \leq 2 \\ p^2 + 4 & \text{für } 2 \leq p \end{cases} .$$