

5 Zu Exponential- und Logarithmusfunktion

Die Funktion $f : x \rightarrow e^x$ hat, wie man aus der Mittelschule weiss, die Eigenschaft, dass ihre Ableitung wiederum f ist, $f'(x) \equiv f(x)$. Wir wollen hier als erstes zeigen, dass diese Eigenschaft zusammen mit der Forderung $f(0) = 1$ die Funktion $x \rightarrow e^x$ eindeutig bestimmt. Etwas allgemeiner zeigen wir

Satz *Es sei A eine reelle Zahl, und es seien $f : x \rightarrow f(x)$ und $g : x \rightarrow g(x)$ zwei differenzierbare Funktionen mit der Eigenschaft*

$$(5.1) \quad f'(x) = A f(x)$$

beziehungsweise

$$(5.2) \quad g'(x) = A g(x)$$

für alle x . Dann gilt

$$f(x) = C g(x) ,$$

wobei C eine reelle Konstante bezeichnet.

Beweis Wir betrachten die Funktion

$$h : x \rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} .$$

Dann gilt wegen (5.1) und (5.2)

$$h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} = \frac{A f(x) g(x) - f(x) A g(x)}{(g(x))^2} = 0 .$$

Aus $h'(x) \equiv 0$ folgt $h(x) \equiv C$ und damit

$$f(x) \equiv C g(x).$$

Dies war zu beweisen.

Eine Gleichung zwischen einer Funktion f und ihrer Ableitung f' (oder ihren Ableitungen f', f'', \dots) heisst bekanntlich eine **Differentialgleichung**. Eine Funktion f , für welche die Differentialgleichung identisch in x erfüllt ist, heisst **Lösung** der Differentialgleichung. Unsere Beziehung (5.1) ist ein Beispiel einer solchen Gleichung. Unser Satz besagt, dass die Lösung der Differentialgleichung (5.1) bis auf eine multiplikative Konstante festgelegt ist, insbesondere folgt, dass (5.1) zusammen mit der (Anfangs-)Bedingung $f(0) = 1$ die Lösung *eindeutig* festlegt. Wir werden im 2. Semester sehen, dass Ähnliches ganz allgemein für Differentialgleichungen und ihre (Anfangs-)Bedingungen gilt. Es handelt sich hier um ein ganz fundamentales Prinzip.

Die Differentialgleichung

$$f'(x) = Af(x)$$

zusammen mit der Bedingung $f(0) = 1$, beschreibt also auf eindeutige Art und Weise eine Funktion $f : x \rightarrow f(x)$, nämlich $x \rightarrow e^{Ax}$. Setzen wir $A = 1$, so folgt, dass die Differentialgleichung

$$(5.3) \quad f'(x) = f(x)$$

zusammen mit $f(0) = 1$ die **Exponentialfunktion** $x \rightarrow e^x$ charakterisiert (siehe Figur 1).

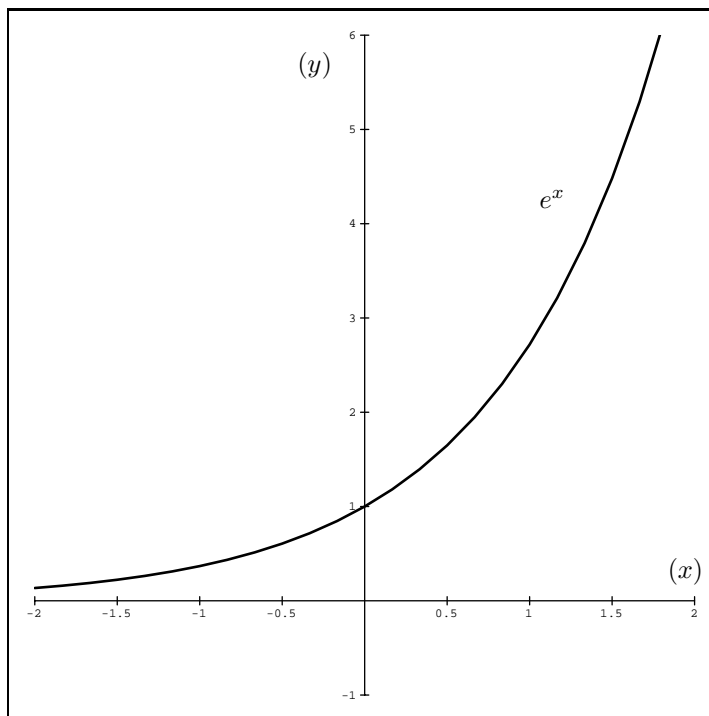


FIG. 1 :
Die Exponentialfunktion $x \rightarrow e^x$

Um das noch etwas zu illustrieren, zeigen wir, wie wichtige Eigenschaften der Exponentialfunktion f direkt aus der Differentialgleichung hergeleitet werden können. Wir wählen als erstes die

fundamentale Eigenschaft der Exponentialfunktion

$$f(a+b) = f(a) \cdot f(b) \quad \left(\text{also } e^{a+b} = e^a \cdot e^b \right).$$

Zu diesem Zweck betrachten wir die Funktion g , welche durch

$$g : x \rightarrow g(x) = f(a+x)$$

definiert wird. Dann folgt

$$g'(x) = f'(a+x) = f(a+x) = g(x) ,$$

d.h. $g : x \rightarrow g(x)$ ist wie f ebenfalls Lösung der Differentialgleichung (5.3). Aus unserem Satz folgt dann, dass eine Konstante C existiert mit

$$g(x) = C \cdot f(x) .$$

Insbesondere gilt

$$f(a) = g(0) = C \cdot f(0) = C,$$

da ja laut Voraussetzung $f(0) = 1$ gilt. Also erhalten wir die für alle x gültige Gleichung

$$g(x) = f(a) \cdot f(x).$$

Setzen wir darin $x = b$, so folgt

$$(5.4) \quad g(b) = f(a+b) = f(a) \cdot f(b).$$

Dies wollten wir direkt aus der Differentialgleichung herleiten.

Auch konkrete Informationen über die Zahl e lassen sich aus (5.3) und (5.4) erhalten. Nach (5.4) gilt für jede natürliche Zahl

$$e = e^1 = f\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n.$$

Betrachten wir den Punkt $x = 0$, so gilt wegen $f''(x) = (f')'(x) = f'(x) = f(x)$ natürlich

$$f''(0) = 1.$$

Insbesondere ist der Graph von f an der Stelle $x = 0$ nach links gekrümmt (konvex). Dann folgt aber sofort (siehe Figur 2)

$$f(x) > 1 + x$$

für alle x die genügend nahe bei $x_0 = 0$ liegen. Mit obiger Formel erhalten wir nun

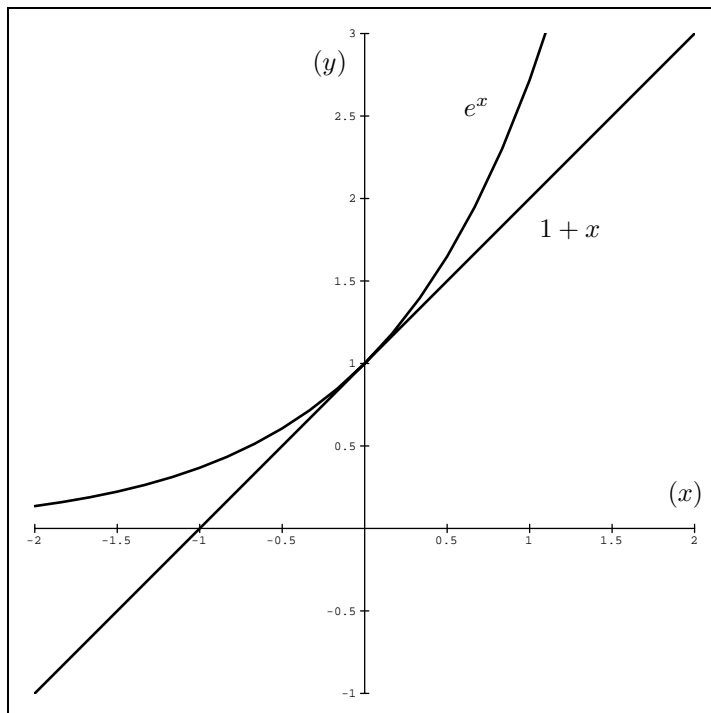


FIG. 2:
Die Exponentialfunktion $x \rightarrow e^x$
und die lineare Funktion
 $x \rightarrow 1 + x$

$$e = f(1) = \left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

und analog

$$\frac{1}{e} = f(-1) = \left(f\left(-\frac{1}{n}\right) \right)^n > \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n = \left(\frac{n-1}{n} \right)^n.$$

Diese beiden Beziehungen liefern die Ungleichungen

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < e < \left(\frac{n}{n-1} \right)^n = \left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^n = \left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1} \right).$$

Lässt man n auf beiden Seiten gegen ∞ streben, so erhält man links und rechts denselben Grenzwert. Daraus folgt (siehe Figur 3)

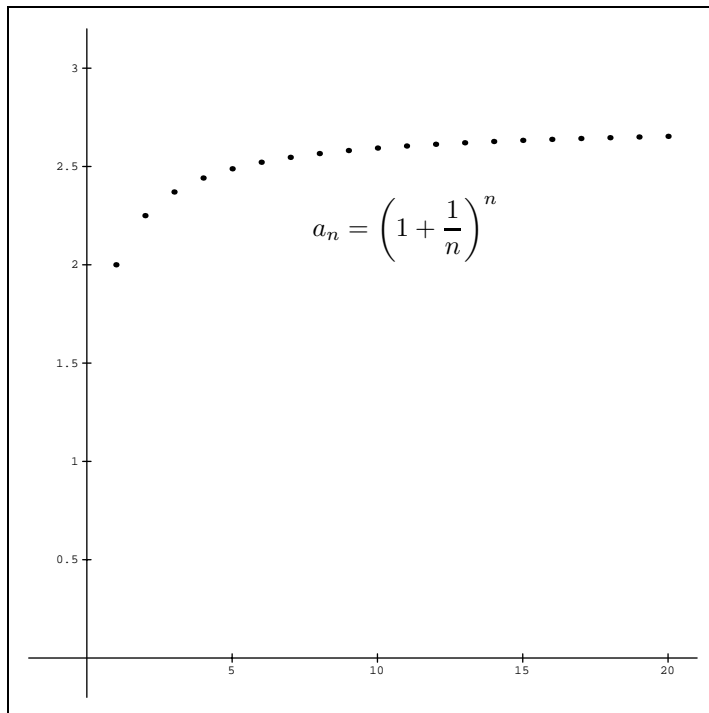


FIG. 3:
Die gegen e konvergierende
Folge $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e.$$

Schliesslich versuchen wir noch, unsere Funktion f in Form eines “unendlichen Polynoms”, d.h. durch eine Potenzreihe darzustellen. Wir werden diese Art, Funktionen zu beschreiben, später genauer kennenlernen. Hier wollen wir das Thema nur kurz antippen. Wir machen den *Ansatz*

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots .$$

Die Bedingung $f(0) = 1$ liefert sofort $a_0 = 1$. Die reellen Zahlen a_1, a_2, \dots versuchen wir mit Hilfe der Differentialgleichung (5.3) zu bestimmen. (Gliederweises) Ableiten und Einsetzen in (5.3) ergibt

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots .$$

Daraus folgt zuerst

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 = 1 \\ 2a_2 &= a_1 \\ 3a_3 &= a_2 \\ 4a_4 &= a_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

und damit

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{3!}, \dots, a_n = \frac{1}{n!}, \dots$$

Es ergibt sich daraus der folgende Ausdruck für $f(x)$ in Form einer unendlichen Summe

$$f(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots .$$

Man nennt dies eine *Potenzreihe* (mit Mittelpunkt 0). Natürlich müsste man an dieser Stelle beweisen, dass diese unendliche Summe konvergiert und dass die durch sie dargestellte Funktion die Gleichung (5.3) erfüllt. Wir werden später sehen, wenn wir uns eingehender mit Potenzreihen beschäftigen werden, dass dies tatsächlich der Fall ist. Hier wollen wir den oben erhaltenen Reihenausdruck als gültig annehmen und darin $x = 1$ setzen. Wir erhalten für den Funktionswert $f(1)$, also für e die Reihe

$$e = f(1) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots .$$

Dies ist die uns bereits bekannte Beschreibung der Euler'schen Zahl e durch eine Reihe (siehe Kap. I, Abschnitt 1).

Schliesslich beschäftigen wir uns noch kurz mit der **Logarithmusfunktion**. Wegen $f'(x) = f(x) > 0$ ist f strikt monoton wachsend und deshalb injektiv. Es existiert also die zu f inverse Funktion; diese heisst - definitionsgemäss - der (natürliche) Logarithmus $\log : x \rightarrow \log(x)$ (siehe Figur 4). Es gilt

$$\frac{d \log}{dx}(x) = \frac{1}{f'(\log(x))} = \frac{1}{f(\log(x))} = \frac{1}{x}.$$

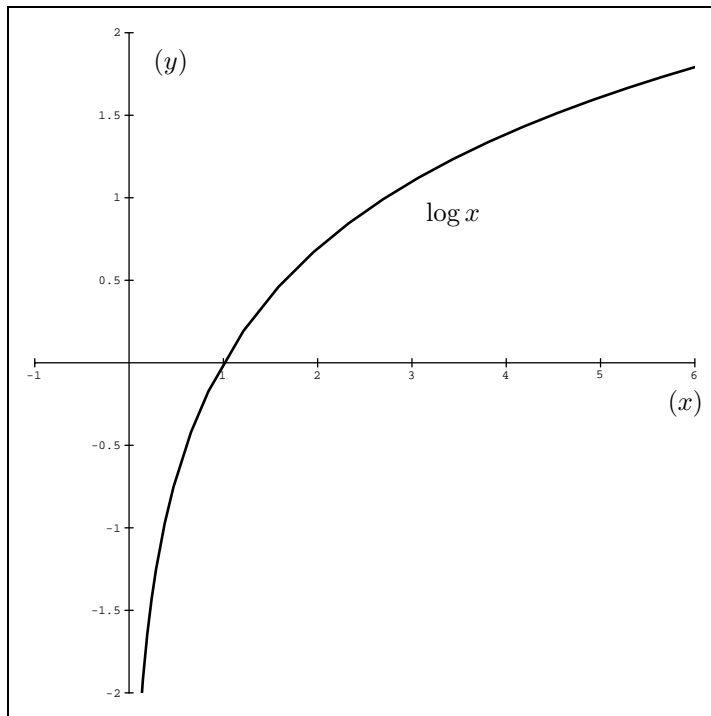


FIG. 4:
Die Logarithmusfunktion
 $x \rightarrow \log x$

Da der Wertebereich der Exponentialfunktion aus allen positiven Zahlen besteht, ist der Definitionsbereich der Logarithmusfunktion durch $D(\log) = (0, \infty)$ gegeben. In diesem Bereich ist $\log'(x)$ positiv, so dass \log strikt monoton wachsend ist. Ausserdem folgt aus der Definition von \log als inverse Funktion der Exponentialfunktion $\log(1) = 0$.

Um die Funktionalgleichung des Logarithmus, d.h. die grundlegende Beziehung

$$\log(a \cdot b) = \log a + \log b, \quad a, b > 0$$

aus der Definition herzuleiten, betrachten wir die Funktion $x \rightarrow \log(ax)$ und berechnen deren Ableitung,

$$\frac{d}{dx} \log(ax) = a \log'(ax) = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}.$$

Die Funktionen $x \rightarrow \log x$ und $x \rightarrow \log(ax)$ besitzen die gleiche Ableitung, sie unterscheiden sich deshalb nur um eine additive Konstante,

$$\log(ax) - \log x \equiv C .$$

Um C zu bestimmen setzt man $x = 1$; man erhält $C = \log a$. Damit folgt, wie gewünscht

$$\log(a \cdot b) = \log a + \log b .$$

Wenn man in dieser Beziehung $a = 1/b$ setzt und $\log 1 = 0$ berücksichtigt, so erhält man $\log(1/b) = -\log b$, so dass folgt

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b .$$

Es war Ziel des ersten Teils dieses Abschnittes, zu zeigen, wie eine Differentialgleichung die Eigenschaften ihrer Lösungen festlegt. Wir haben dies am Beispiel der einfachen Differentialgleichung der Exponentialfunktion zu erklären versucht. Im Rest des Abschnittes wollen wir uns noch mit der Exponentialfunktion zu *beliebiger* Basis a , $a > 1$ beschäftigen und die sogenannten *hyperbolischen Funktionen* einführen.

Es sei $a > 1$ eine reelle Zahl. Es lässt sich offensichtlich a^x mit Hilfe der Exponentialfunktion zur Basis e wie folgt schreiben

$$a^x = e^{(\log a)x} .$$

Daraus erhält man sofort die Ableitung der Funktion $x \rightarrow a^x$

$$\frac{d}{dx} a^x = (\log a) a^x .$$

Da diese Ableitung offenbar für alle x -Werte positiv ist, ist die Funktion $x \rightarrow a^x$ strikt monoton wachsend. Wir können deshalb die zu ihr inverse Funktion definieren; wir nennen sie ${}^a\log$. Es gilt

$${}^a\log : x \rightarrow {}^a\log x = \frac{1}{\log a} \log x .$$

Dies ergibt sich leicht aus $e^{\log x} = x = a^{{}^a\log x} = e^{(\log a) {}^a\log x}$. Für $x = e$ erhält man wegen $\log e = 1$

$${}^a\log e = \frac{1}{\log a} .$$

Deshalb gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned}
 {}^a\log x &= {}^a\log e \cdot \log x \quad , \\
 \frac{d}{dx} a^x &= \frac{1}{{}^a\log e} a^x \quad , \\
 \frac{d}{dx} {}^a\log x &= \frac{1}{\log a} \frac{1}{x} = {}^a\log e \frac{1}{x} .
 \end{aligned}$$

Zum Schluss wollen wir uns noch den sogenannten **hyperbolischen Funktionen** zuwenden, die mit Hilfe der Exponentialfunktionen definiert sind (siehe Figur 5).

Definition Der *Sinus hyperbolicus* ist definiert durch

$$\sinh x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \quad ,$$

der *Cosinus hyperbolicus* ist definiert durch

$$\cosh x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \quad .$$

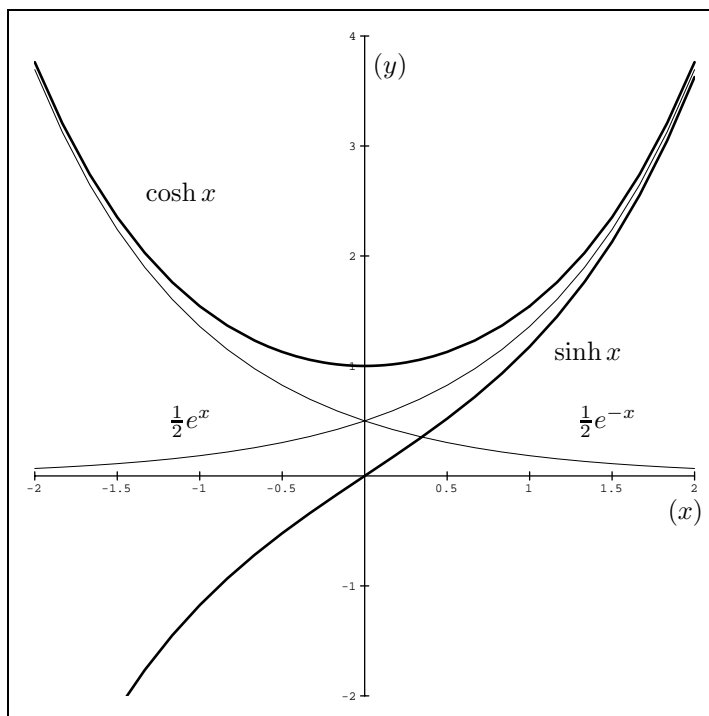


FIG. 5 :
Die hyperbolischen Funktionen

Für diese Funktionen gelten die folgenden Identitäten, die sich auf einfache Weise aus den Definitionen ergeben:

- (1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x \equiv 1$;
- (2) $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$;
- (3) $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$;
- (4) $\frac{d \sinh}{dx}(x) = \cosh x$;
- (5) $\frac{d \cosh}{dx}(x) = \sinh x$.

Die Formeln erinnern den Leser an die entsprechenden Formeln für die Sinus- und Cosinusfunktionen; sie liefern eine Rechtfertigung für die (historisch gewählten) Bezeichnungen der hyperbolischen Funktionen. Um auch das Auftreten des Wortes “hyperbolisch” zu erklären, betrachten wir die durch die Parameterdarstellung

$$t \rightarrow (\cosh t, \sinh t), \quad t \in \mathbb{R}$$

gegebene Kurve. Es gilt dann nach der ersten der obigen Identitäten $(x(t))^2 - (y(t))^2 = 1$, d.h. die Punkte der Kurve liegen auf der Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$, genauer auf dem rechten Ast dieser Hyperbel.

Die Graphen der hyperbolischen Funktionen ergeben sich sehr leicht aus den Definitionen. Insbesondere ist der Sinus hyperbolicus eine ungerade, der Cosinus hyperbolicus eine gerade Funktion. Der Graph der Cosinus hyperbolicus Funktion heisst auch etwa *Kettenlinie*, weil eine an den zwei Enden aufgehängte frei bewegliche Kette die Form des Graphen von $x \rightarrow a \cosh(x/a)$ annimmt.

Wegen $\sinh' x = \cosh x$ ist der Sinus hyperbolicus strikt monoton wachsend, also insbesondere injektiv. Es gibt deshalb eine zum Sinus hyperbolicus inverse Funktion; diese heisst in der Literatur *Arsinh* (“*Area sinus hyperbolicus*”, siehe Figuren 6,7). Sie lässt sich wie folgt auf elementare Weise ausdrücken. Laut Definition ist die Gleichung

$$y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

nach x aufzulösen. Man erhält der Reihe nach

$$\begin{aligned} e^{2x} - 1 &= 2ye^x \\ (e^x)^2 - 2ye^x - 1 &= 0 \\ e^x &= y \pm \sqrt{y^2 + 1}. \end{aligned}$$

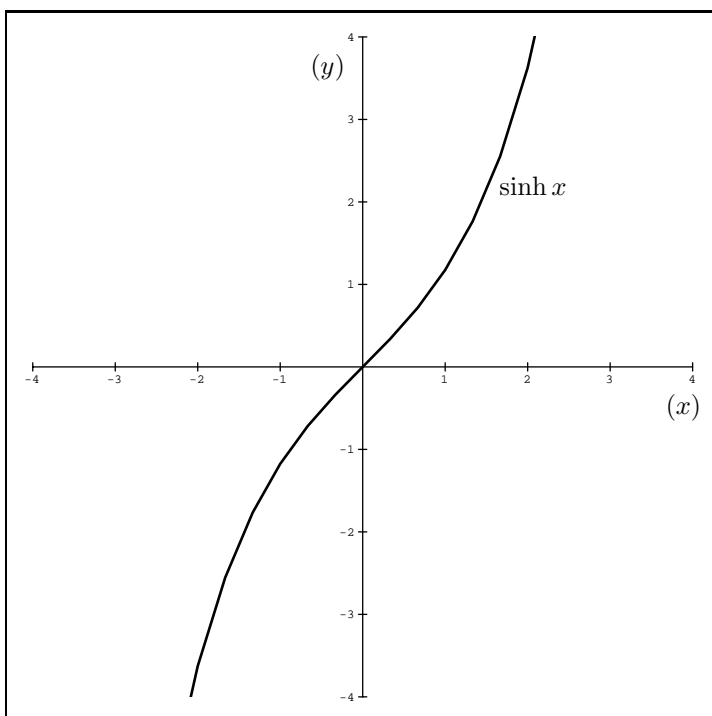


FIG. 6:
Sinus hyperbolicus $x \rightarrow \sinh x$

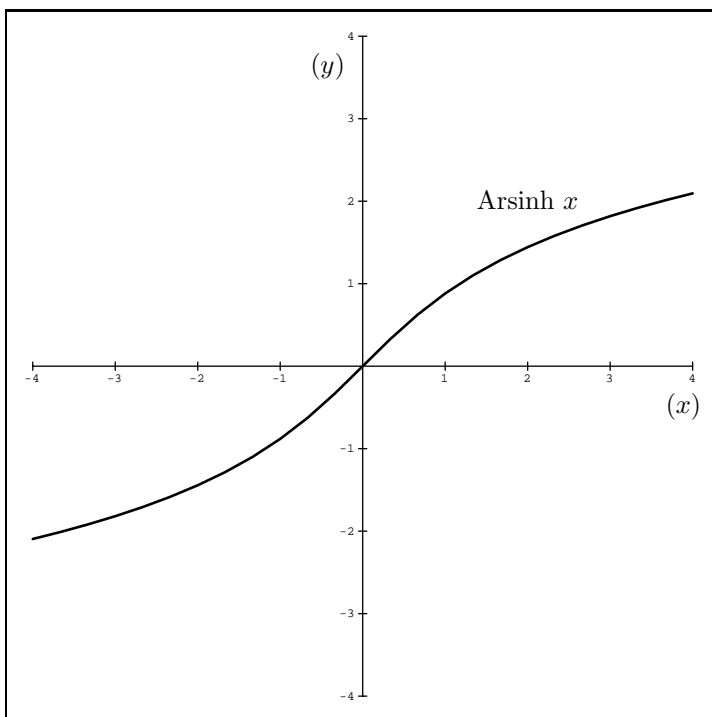


FIG. 7:
Area sinus hyperbolicus
 $x \rightarrow \operatorname{Arsinh} x$

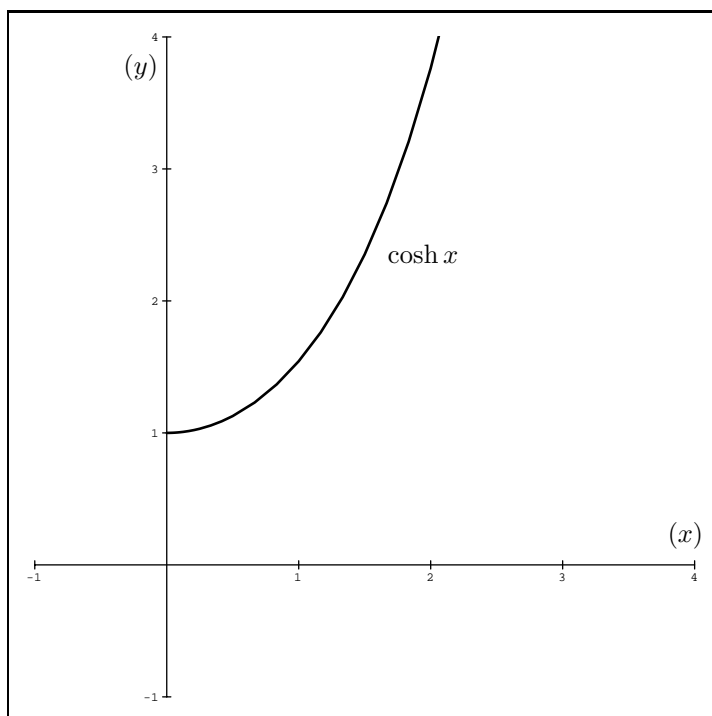


FIG. 8:
Cosinus hyperbolicus
 $x \rightarrow \cosh x$, $x \in [0, \infty]$

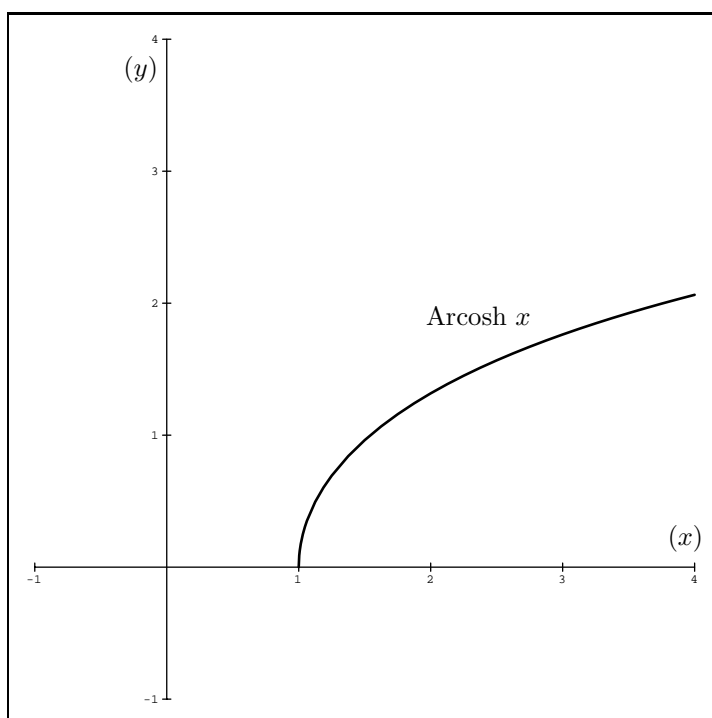


FIG. 9:
Area cosinus hyperbolicus
 $x \rightarrow \text{Arcosh } x$

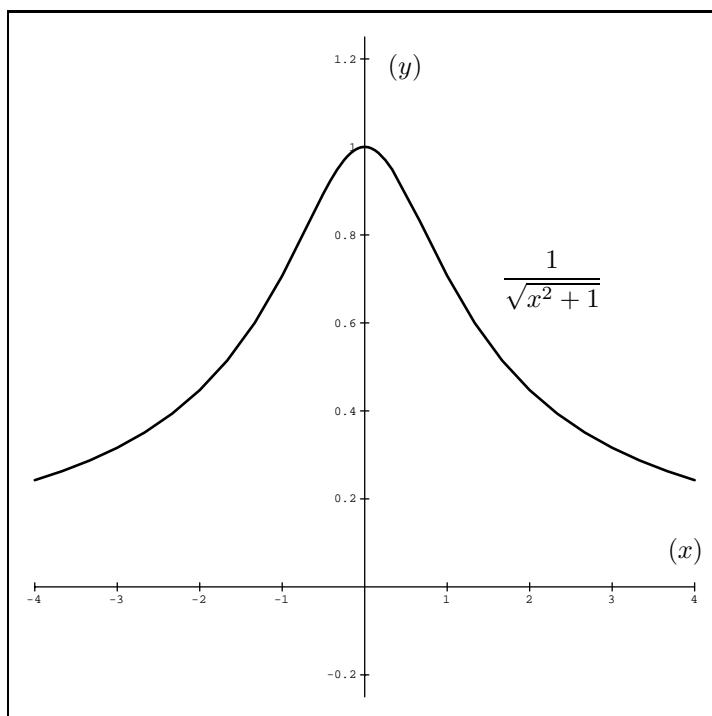


FIG. 10:
Die Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} ;$$

Ableitung von $x \rightarrow \operatorname{Arsinh} x$

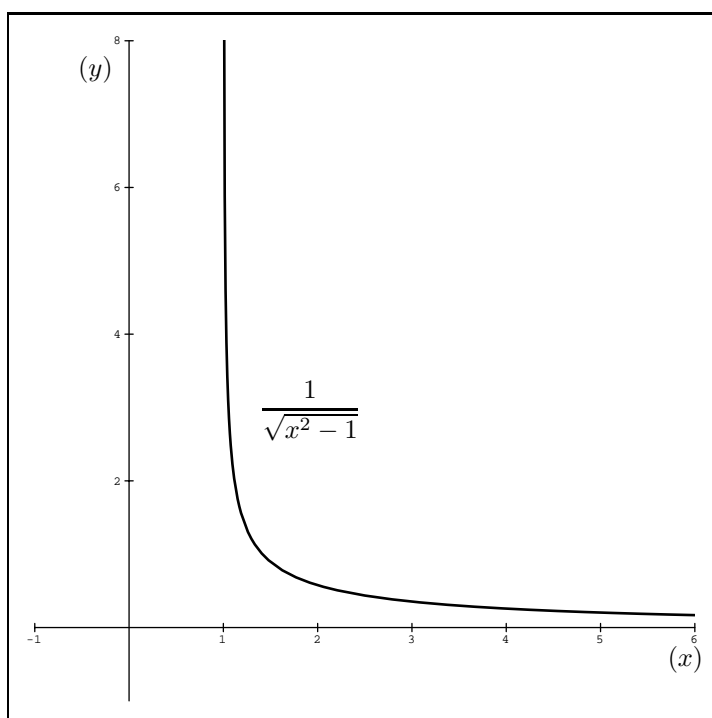


FIG. 11:
Die Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} ;$$

Ableitung von $x \rightarrow \operatorname{Arcosh} x$

Das negative Vorzeichen kann wegen $e^x > 0$ ausgeschlossen werden, so dass schliesslich folgt

$$x = \log \left(y + \sqrt{y^2 + 1} \right) .$$

Die inverse Funktion des Sinus hyperbolicus wird durch die Formel

$$\operatorname{Arsinh} : x \rightarrow \log \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

beschrieben.

Schränkt man den Definitionsbereich des Cosinus hyperbolicus auf die nicht negativen Zahlen $[0, \infty)$ ein, so erhält man eine injektive Funktion. Die dazu inverse Funktion heisst Arcosh (*“Area cosinus hyperbolicus”*, siehe Figuren 8,9). Auf analoge Art wie beim Sinus hyperbolicus erhält man eine elementare Beschreibung, nämlich

$$\operatorname{Arcosh} : x \rightarrow \log \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) .$$

Definitionsbereich dieser Funktion ist natürlich das Intervall $[1, \infty)$.

Interessant sind die Funktionen Arsinh und Arcosh besonders wegen ihrer Ableitungen. Für deren Berechnung kann man entweder von der elementaren Beschreibung ausgehen oder direkt von der Definition als inverse Funktionen. Eine kurze Rechnung liefert (siehe Figuren 10,11)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \operatorname{Arsinh} x &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} , \\ \frac{d}{dx} \operatorname{Arcosh} x &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} . \end{aligned}$$

Die überraschende Tatsache, dass die Ableitungen einfache Wurzelfunktionen sind, wird beim Integrieren eine grosse Rolle spielen.