

## 8 Ebene Kurven

Ebene Kurven können auf viele verschiedene Arten beschrieben werden. Wir arbeiten in dieser Vorlesung vor allem mit den folgenden.

### I. Parameterdarstellung

Eine Parameterdarstellung der Kurve  $K$  besteht darin, dass für jeden Wert des Parameters  $t$  ein zugehöriger Punkt  $(x(t), y(t))$  der Kurve  $K$  festgelegt wird. Es ist also eine Funktion

$$t \rightarrow \vec{r}(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in [b_1, b_2]$$

gegeben, wobei  $\vec{r}(t)$  als Ortsvektor aufzufassen ist. Man kann diese Funktion als Abbildung des Parameterintervalles  $[b_1, b_2]$  in die Ebene auffassen.

**Beispiel** Kreis mit Radius  $a$  um den Punkt  $P = (x_0, y_0)$

$$t \rightarrow (x_0 + a \cos t, y_0 + a \sin t), \quad 0 \leq t < 2\pi .$$

Eine ebene Bewegung eines Massenpunktes wird auf natürlichste Art mit Hilfe einer Parameterdarstellung mit der Zeit als Parameter beschrieben.

Eliminiert man aus der Parameterdarstellung einer Kurve den Parameter  $t$ , so gelangt man zur impliziten Darstellung.

### II. Implizite Darstellung

Die Kurve  $K$  ist beschrieben als Menge der Punkte  $(x, y)$ , deren Koordinaten die Gleichung  $F(x, y) = 0$  erfüllen.

**Beispiel** Kreis mit Radius  $a$  um  $P$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - a^2 = 0 .$$

Löst man die Gleichung  $F(x, y) = 0$  nach  $y$  auf, so erhält man eine explizite Darstellung der Kurve  $K$ .

### III. Explizite Darstellung

Die Kurve  $K$  ist als Graph einer Funktion  $x \rightarrow y(x)$  gegeben.

**Beispiel** Kreis mit Radius  $a$  um  $P$

$$f_1 : x \rightarrow y = +\sqrt{a^2 - (x - x_0)^2} + y_0, \quad D(f_1) = [x_0 - a, x_0 + a] ,$$

$$f_2 : x \rightarrow y = -\sqrt{a^2 - (x - x_0)^2} + y_0, \quad D(f_2) = [x_0 - a, x_0 + a] .$$

Man beachte, dass in diesem Beispiel zwei(!) Funktionen notwendig sind, um den vollen Kreis zu beschreiben (siehe Figur 1).

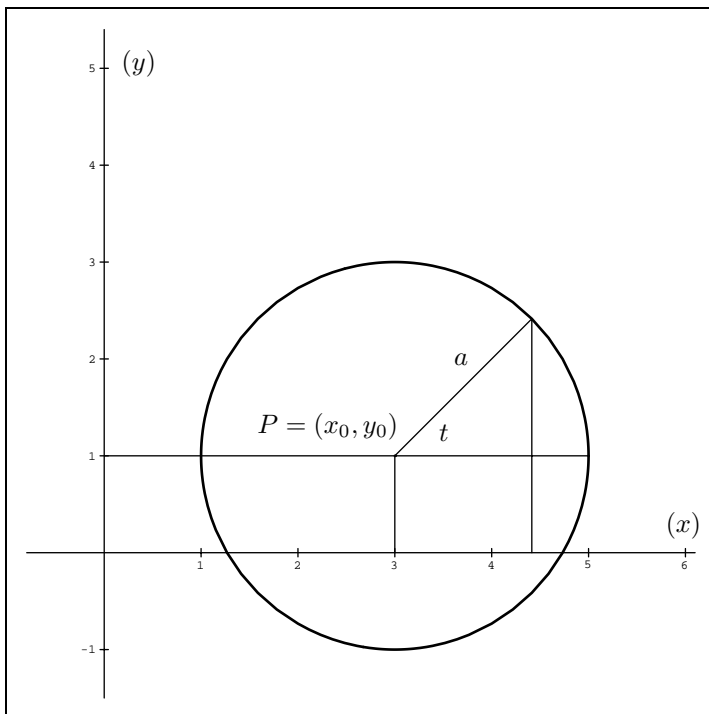


FIG. 1 :  
Kreis

**Beispiel** Ellipse mit Halbachsen  $a$  und  $b$  und Mittelpunkt im Ursprung (siehe Figur 2).  
Parameterdarstellung:

$$t \rightarrow \vec{r}(t) = (a \cos t, b \sin t), \quad 0 \leq t < 2\pi .$$

Implizite Darstellung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

Explizite Darstellung:

$$f_1 : x \rightarrow y = +b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad D(f_1) = [-a, +a] ,$$

$$f_2 : x \rightarrow y = -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad D(f_2) = [-a, +a] .$$

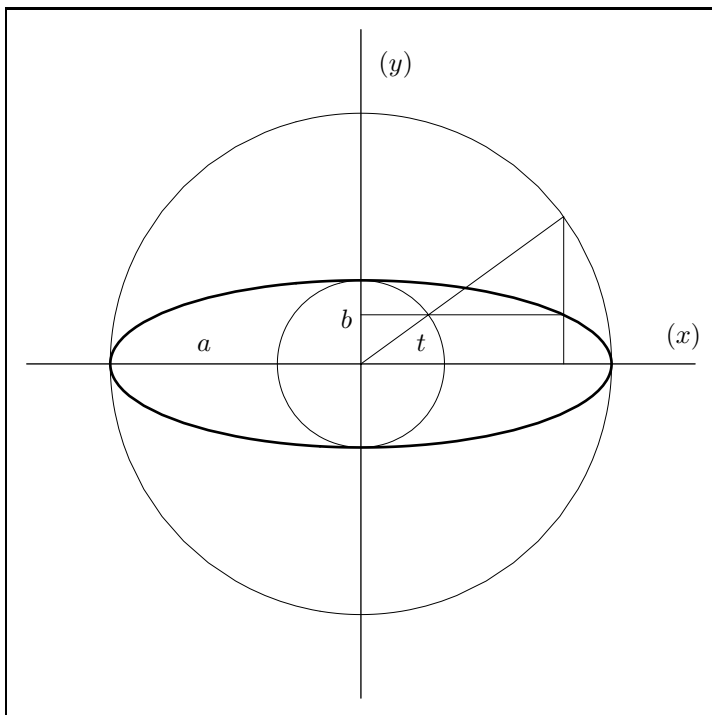


FIG. 2:  
Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

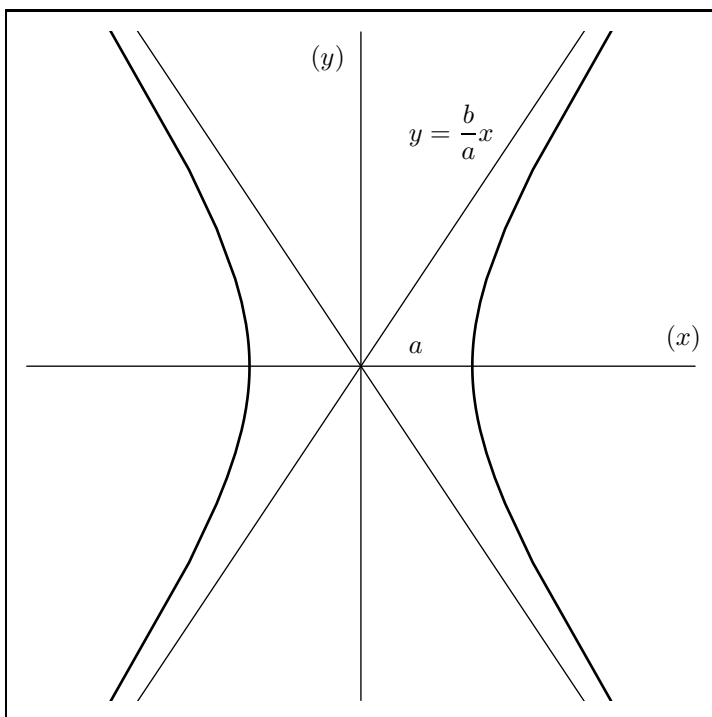


FIG. 3:  
Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

**Beispiel** Hyperbel mit Mittelpunkt im Ursprung (siehe Figur 3).

Parameterdarstellung (rechter Ast):

$$t \rightarrow \vec{r}(t) = (a \cosh t, b \sinh t), \quad -\infty < t < \infty .$$

Implizite Darstellung (beide(!) Äste):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

Explizite Darstellung:

$$f_1 : x \rightarrow y = +b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}, \quad D(f_1) = (-\infty, -a] \cup [a, \infty) ,$$

$$f_2 : x \rightarrow y = -b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}, \quad D(f_2) = (-\infty, -a] \cup [a, \infty) .$$

Aus der expliziten Darstellung kann man unmittelbar ablesen, dass die beiden Geraden

$$y = \pm \frac{b}{a}x$$

für  $x \rightarrow \pm\infty$  Asymptoten der Hyperbel sind.

**Bemerkungen** Eine Kurve lässt unendlich viele verschiedene Parameterdarstellungen zu; sie kann nämlich mit “verschiedenen Geschwindigkeiten” durchlaufen werden. Eine Parameterdarstellung einer Kurve enthält neben der Information über die geometrische Gestalt der Kurve noch weitere Informationen.

Die Elimination des Parameters aus der Parameterdarstellung ist nicht in jedem Fall möglich, d.h. der Übergang zur impliziten Form lässt sich nicht immer durchführen.

Die Auflösung nach  $y$  der Gleichung der impliziten Darstellung ist nicht immer möglich; ferner werden in vielen Fällen mehrere Funktionen benötigt, um eine Kurve darzustellen. (Von mathematischer Seite ist hier anzumerken, dass sich eine Kurve wenigstens *lokal* fast immer in expliziter Form darstellen lässt. Es gilt nämlich der *Satz über implizite Funktionen*: *Es sei  $(x_0, y_0)$  ein Punkt der durch  $F(x, y) = 0$  gegebenen Kurve  $K$ . Ist die Ableitung von  $F(x, y)$  nach  $y$  in  $(x_0, y_0)$  nicht trivial, so gibt es ein Intervall  $I$  mit Mittelpunkt  $x_0$  und eine Funktion  $f : x \rightarrow f(x)$ ,  $D(f) = I$  mit  $F(x, f(x)) = 0$  für alle  $x \in I$ , d.h.  $x \rightarrow f(x)$  stellt die Kurve in der Umgebung von  $(x_0, y_0)$  dar.* Selbstverständlich gehen wir in dieser Vorlesung nicht auf den Beweis dieses Satzes ein; anschaulich ist das Resultat “klar”, wie ein Blick auf eine entsprechende Figur zeigt.)

Eine explizite Darstellung kann immer auch als Parameterdarstellung aufgefasst werden, indem man  $t = x$  als Parameter wählt:

$$t \rightarrow \vec{r}(t) = (t, f(t)), \quad t \in D(f) .$$

Damit ist der Kreis  $I \rightarrow II \rightarrow III \rightarrow I$  geschlossen.

Wir werden in der Folge bei Kurven im allgemeinen von einer Parameterdarstellung ausgehen, so dass sich jetzt die Frage stellt, wie man an der Parameterdarstellung direkt Eigenschaften der Kurven ablesen kann. Dabei werden für uns die Begriffe *Tangente*, *Normale*, *Krümmung*, *Krümmungskreis* im Vordergrund stehen. Kraft der letzten der obigen Bemerkungen ist in den hergeleiteten Formeln immer auch der Spezialfall der expliziten Darstellung der Kurve enthalten.

Die Kurve  $K$  sei durch die Parameterdarstellung  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$  gegeben. Um die Tangentenrichtung im Punkte  $P$  zu erhalten, betrachten wir den Vektor

$$\frac{\vec{PQ}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

und lassen  $Q$  gegen  $P$ , d.h.  $\Delta t$  gegen 0 streben. Definitionsgemäss erhalten wir im Limes

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \\ &= \left( \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \right) \\ &= (\dot{x}(t), \dot{y}(t)), \end{aligned}$$

wobei wir, wie üblich, die Ableitung nach  $t$  mit einem Punkt bezeichnet haben. Wir halten fest: Der Vektor  $\dot{\vec{r}} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$  ist ein Tangentialvektor an die Kurve im Punkte  $P$ . Die *Tangentensteigung* im Punkt  $P$  ist somit gegeben durch  $\dot{y}(t)/\dot{x}(t)$ .

Beschreibt  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$  die Bewegung eines Massenpunktes, wobei  $t$  die Zeit bedeutet, so ist  $\dot{\vec{r}}$ , dessen (vektorielle) Geschwindigkeit zur Zeit  $t$ .

Die **Tangente** an die Kurve im Punkt  $P$  hat offenbar die Parameterdarstellung

$$\vec{OR} = \vec{r}(t) + s \dot{\vec{r}}(t), \quad -\infty < s < +\infty .$$

Der Vektor  $\vec{n}(t) = (-\dot{y}(t), \dot{x}(t))$  entsteht aus  $\dot{\vec{r}} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$  durch Drehung um  $\pi/2$  im Gegenursigersinn. Die **Normale** zur Kurve in  $P$  hat deshalb die Parameterdarstellung

$$\vec{OS} = \vec{r}(t) + s \vec{n}(t), \quad -\infty < s < +\infty .$$

**Beispiel** Zykloide (siehe Figur 4). Ein Kreis mit Radius  $a$  rolle auf der  $x$ -Achse. Der Punkt der Kreisperipherie, welcher sich zu Anfang im Ursprung des Koordinatensystems befindet, beschreibt bei der Rollbewegung eine *Zykloide*. Wählen wir als Parameter den Drehwinkel  $t$  des Kreises, so liest man aus der Figur leicht die Parameterdarstellung

$$t \rightarrow (at - a \sin t, a - a \cos t), \quad -\infty < t < +\infty$$

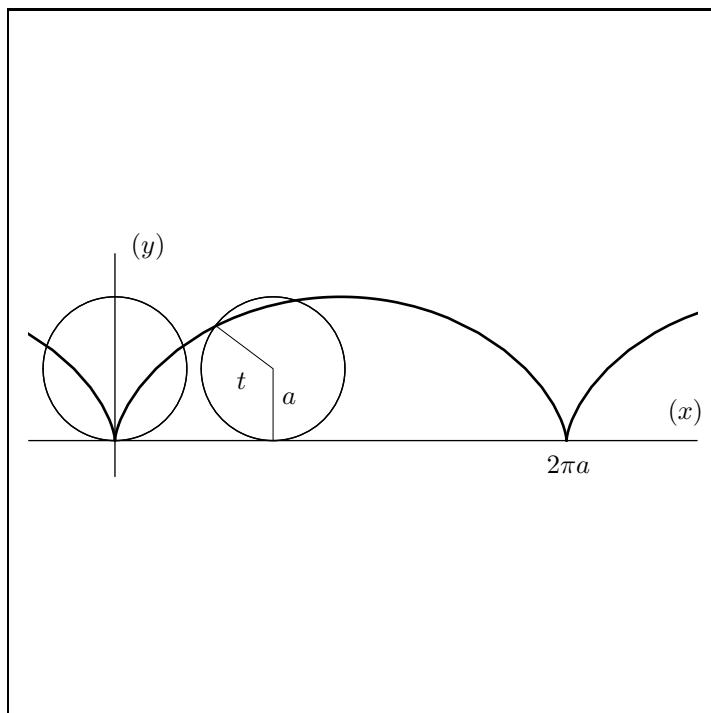


FIG. 4:  
Zykloide

für die Zykloide ab. Ein fest mit der Kreisscheibe verbundener Punkt im Abstand  $b$  vom Mittelpunkt des Kreises beschreibt für  $b < a$  eine sogenannte *verkürzte Zykloide* bzw. für  $b > a$  eine *verlängerte Zykloide* (siehe Figur 5). Die Parameterdarstellung lautet

$$t \rightarrow (at - b \sin t, a - b \cos t), \quad -\infty < t < +\infty .$$

**Beispiel** Die Kurve  $K$  sei gegeben durch die Parameterdarstellung

$$t \rightarrow (\cos t, \sin 2t), \quad 0 \leq t < 2\pi .$$

Für die Steigung der Kurve erhält man  $\dot{y}/\dot{x} = -2\cos 2t/\sin t$ . Die Kurve besitzt also für die Parameterwerte  $t = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$ , d.h. in den Punkten  $(\pm\sqrt{2}/2, \pm 1)$  horizontale

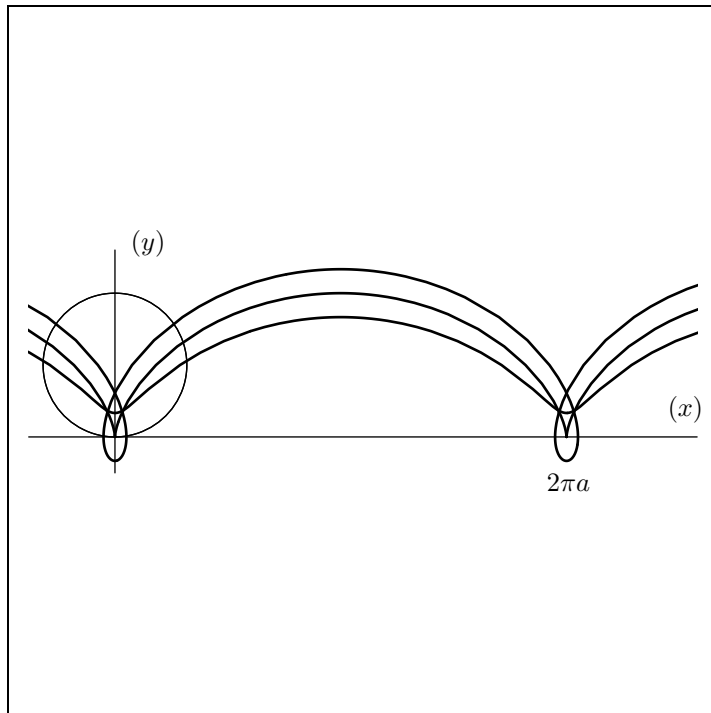


FIG. 5:  
Verkürzte und verlängerte  
Zykloide

Tangenten, und für die Parameterwerte  $t = 0, \pi$ , d.h. in den Punkten  $(\pm 1, 0)$  vertikale Tangenten. Schliesslich geht die Kurve für  $t = \pi/2, 3\pi/2$  durch den Nullpunkt des Koordinatensystems. Die Steigung beträgt 2 für  $t = \pi/2$  und  $-2$  für  $t = 3\pi/2$ . Wegen ihrer Form heisst die Kurve auch etwa *Zwiebelkurve* (siehe Figur 6).

Als nächstes wenden wir uns der Krümmung und dem Krümmungskreis einer Kurve zu.

Die **Krümmung**  $k$  einer Kurve  $K$  ist die Schnelligkeit, mit der sich die Richtung der Tangente an die Kurve ändert, wenn diese mit Geschwindigkeit 1 durchlaufen wird.

Um dies zu präzisieren, müssen wir auf der Kurve Längen messen können, d.h. wir müssen den Begriff der *Bogenlänge* kennen. Dieser dürfte aus der Schule bereits bekannt sein, ausserdem werden wir bei der Integralrechnung noch einmal darauf zurückkommen. Was wir hier benötigen ist die Formel für das sogenannte Bogenelement: wie man aus einer entsprechenden Figur abliest, ist das Differential der Bogenlänge gegeben durch

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt .$$

Bezeichnet  $s(t)$  die von einem festen Punkt bis zu  $(x(t), y(t))$  gemessene Bogenlänge, so gilt also

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} .$$

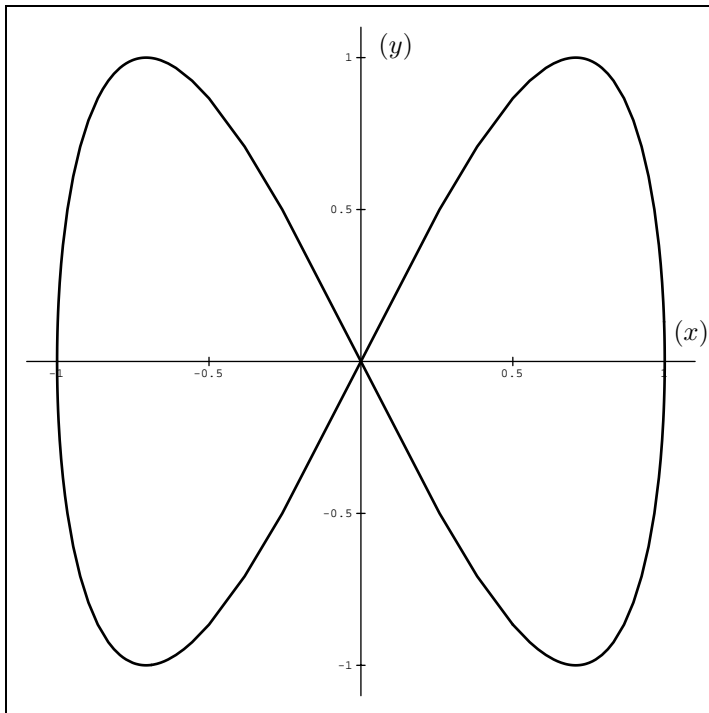


FIG. 6:  
Zwiebelkurve

Nach obigem ist die Krümmung  $k$  definiert als Ableitung des Steigungswinkels  $\alpha$  nach der Bogenlänge  $s$

$$k = \frac{d\alpha}{ds} .$$

Nach der Kettenregel und nach der Formel für die Ableitung der inversen Funktion gilt nun

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{d\alpha/dt}{ds/dt} .$$

Damit genügt es,  $d\alpha/dt$  zu bestimmen. Da  $\tan \alpha$  gerade die Steigung der Kurve ist, gilt

$$\alpha = \begin{cases} \arctan(\dot{y}/\dot{x}), & \text{für } -\pi/2 < \alpha < \pi/2 , \\ \arctan(\dot{y}/\dot{x}) + \pi, & \text{für } \pi/2 < \alpha < 3\pi/2 . \end{cases}$$

Daraus folgt

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{1 + (\dot{y}/\dot{x})^2} \cdot \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} .$$

Für die Krümmung  $k$  der Kurve  $K$  ergibt sich daraus die Formel



$$k = k(t) = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} .$$

Zusätzlich halten wir fest:

$$k > 0 \Leftrightarrow \alpha \text{ nimmt zu} \Leftrightarrow \text{die Kurve ist nach links gekrümmt} ,$$

$$k < 0 \Leftrightarrow \alpha \text{ nimmt ab} \Leftrightarrow \text{die Kurve ist nach rechts gekrümmt} .$$

In Punkten, wo  $k$  das Vorzeichen ändert, liegt ein Wendepunkt der Kurve vor.

**Beispiel** Gegeben ist die Ellipse

$$t \rightarrow (a \cos t, b \sin t) , \quad 0 \leq t < 2\pi .$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -a \sin t, & \ddot{x} &= -a \cos t, \\ \dot{y} &= +b \cos t, & \ddot{y} &= -b \sin t, \end{aligned}$$

und damit

$$k(t) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}} .$$

Insbesondere gilt für den Kreis ( $a = b = r$ )

$$k(t) = 1/r .$$

Kehren wir zur Ellipse zurück und betrachten wir die beiden Scheitel  $t = 0$ ,  $t = \pi/2$ , so liefert die Formel für die Krümmung in diesen beiden Punkten

$$k(0) = \frac{a}{b^2}, \quad k(\pi/2) = \frac{b}{a^2} .$$

Zeichnen wir Kreise mit Radien  $1/k(0)$  bzw.  $1/k(\pi/2)$ , welche die Ellipse in den entsprechenden Scheitelpunkten berühren, so haben diese im Berührungspunkt mit der Ellipse sowohl die Tangente wie die Krümmung gemeinsam. Es sind dies die Krümmungskreise der Ellipse in den Scheitelpunkten (siehe Figur 7).

Der **Krümmungskreis** einer Kurve  $K$  im Punkte  $P$  ist definitionsgemäss derjenige Kreis, der in  $P$  die gleiche Tangentensteigung und die gleiche Krümmung wie die Kurve  $K$  hat. Es ist also der Kreis, welcher die Kurve im Punkte  $P$  am besten approximiert.

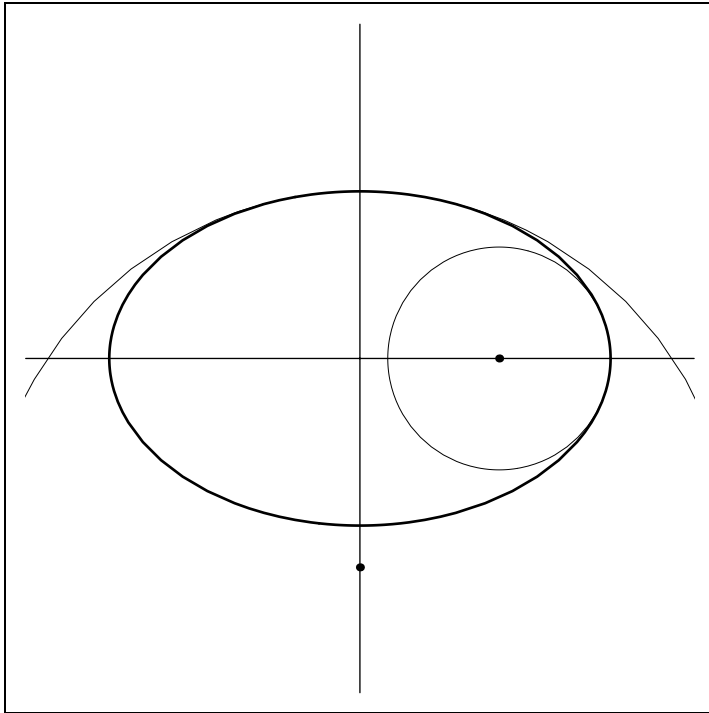


FIG. 7:  
Die Krümmungskreise an den  
Scheitelpunkten der Ellipse

Nach obigem ist der Radius des Krümmungskreises  $|1/k|$ . Sein Mittelpunkt liegt auf der Normalen zur Kurve  $K$  im Punkte  $P$  und zwar links der Kurve, falls  $k$  positiv und rechts der Kurve, falls  $k$  negativ ist. Der nach links zeigende Normaleneinheitsvektor  $\vec{m}(t)$  zu  $K$  in  $P$  ist

$$\vec{m}(t) = \frac{(-\dot{y}(t), \dot{x}(t))}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} .$$

Der Mittelpunkt  $M_0$  des Krümmungskreises, der Krümmungsmittelpunkt ist somit gegeben durch

$$O\vec{M}_0 = \vec{r}(t) + \frac{1}{k(t)} \vec{m}(t) .$$

Durchläuft man die Kurve  $K$ , so beschreibt der Krümmungsmittelpunkt  $M_0$  eine Kurve  $K'$ . Diese heisst **Evolute** von  $K$ .

**Beispiel** Die Zykloide

$$t \rightarrow \vec{r}(t) = (at - a \sin t, a - a \cos t)$$

besitzt nach unserer Formel die Krümmung

$$k(t) = \frac{-1}{2a\sqrt{2(1-\cos t)}} .$$

Für den Normaleneinheitsvektor  $\vec{m}$  erhält man

$$\vec{m}(t) = \left( \frac{-\sin t}{\sqrt{2(1-\cos t)}}, \frac{1-\cos t}{\sqrt{2(1-\cos t)}} \right) .$$

Einsetzen in die Parameterdarstellung der Evolute liefert

$$O\vec{M}_0 = (at + a \sin t, -a + a \cos t) .$$

Setzt man  $t = t' - \pi$ , so erhält man

$$\begin{aligned} O\vec{M}_0 &= (at' - a\pi - a \sin t', -a - a \cos t') \\ &= (-a\pi + (at' - a \sin t'), -2a + (a - a \cos t')) . \end{aligned}$$

Führt man nun neue Koordinaten  $\xi = x + a\pi$ ,  $\eta = y + 2a$  ein, so beschreibt diese Formel eine Zykloide im  $(\xi, \eta)$ -Koordinatensystem.

**Beispiel** Gegeben sei die Parabel  $y = x^2$ . Wir fassen die explizite Darstellung als Parameterdarstellung

$$t \rightarrow \vec{r}(t) = (t, t^2), \quad t \in \mathbb{R}$$

auf. Die Krümmung  $k$  ergibt sich daraus zu

$$k(t) = \frac{2}{(1 + 4t^2)^{3/2}}$$

und für den Normaleneinheitsvektor  $\vec{m}$  erhält man

$$\vec{m}(t) = \frac{1}{(1 + 4t^2)^{1/2}} \cdot (-2t, 1) ,$$

so dass die Parameterdarstellung der Evolute

$$O\vec{M}_0 = (-4t^3, 1/2 + 3t^2), \quad t \in \mathbb{R} ,$$

lautet. In diesem Fall lässt sich sogar der Parameter leicht eliminieren und man kann zur expliziten Darstellung übergehen. Die Evolute der Parabel ist der Graph der Funktion

$$x \rightarrow \frac{1}{2} + 3 \left( \frac{x}{4} \right)^{2/3} .$$

Daraus ergibt sich ohne weiteres auch das geometrische Bild (siehe Figur 8).

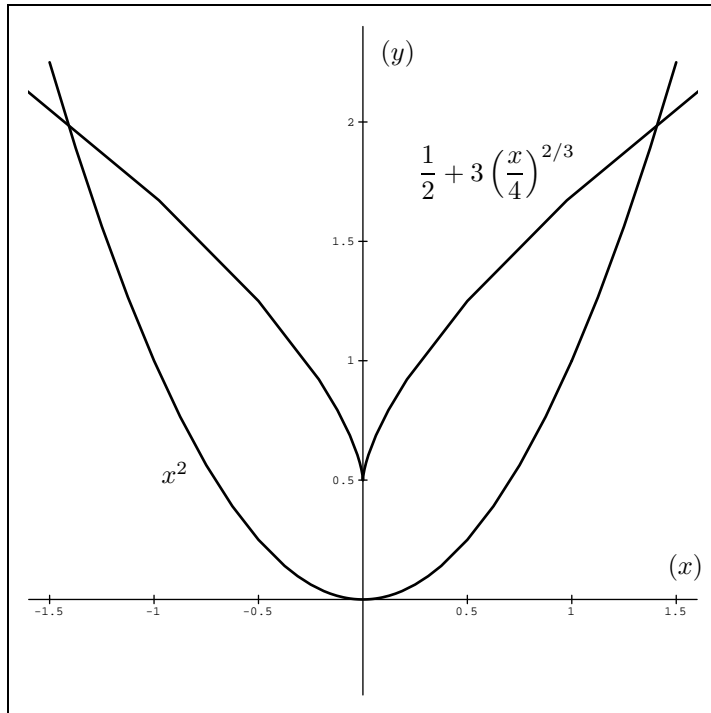


FIG. 8:  
Evolute der Parabel

Schliesslich beschäftigen wir uns noch kurz mit Kurven, die durch **Gleichungen in Polarkoordinaten** gegeben sind. Ist  $\rho = f(\varphi)$  eine solche Gleichung, so gehört ein Punkt zur Kurve  $K$ , wenn seine Polarkoordinaten  $(\rho, \varphi)$  die Gleichung erfüllen. Eine solche Darstellung gibt in offensichtlicher Weise Anlass zu einer Parameterdarstellung von  $K$  mit Parameter  $\varphi$

$$\varphi \rightarrow \vec{r}(\varphi) = (f(\varphi) \cos \varphi, f(\varphi) \sin \varphi) ,$$

so dass man auf dem Umweg über diese Parameterdarstellung Informationen über die Kurve erhalten kann.

**Beispiel** Die logarithmische oder Bernoulli'sche Spirale (Jakob Bernoulli 1654 - 1705) ist gegeben durch die Gleichung

$$\rho = C \cdot e^{k\varphi}, \quad C, k > 0$$

in Polarkoordinaten (siehe Figur 9). Wir gehen über zur Parameterdarstellung

$$\varphi \rightarrow \vec{r}(\varphi) = (C \cdot e^{k\varphi} \cos \varphi, C \cdot e^{k\varphi} \sin \varphi) .$$

Die Tangentenrichtung der Kurve ergibt sich durch Ableitung nach  $\varphi$

$$\dot{\vec{r}}(\varphi) = (Cke^{k\varphi} \cos \varphi - C \cdot e^{k\varphi} \sin \varphi, Cke^{k\varphi} \sin \varphi + C \cdot e^{k\varphi} \cos \varphi) .$$

Die Kurve hat also vertikale Tangenten für  $k \cos \varphi - \sin \varphi = 0$ , d.h. für  $\tan \varphi = k$ , und horizontale Tangenten für  $k \sin \varphi + \cos \varphi = 0$  d.h. für  $\tan \varphi = -1/k$ . Man stellt die überraschende Tatsache fest, dass die beiden Richtungen, in denen vertikale bzw. horizontale Tangenten auftreten, senkrecht aufeinander stehen (siehe Figur 10).

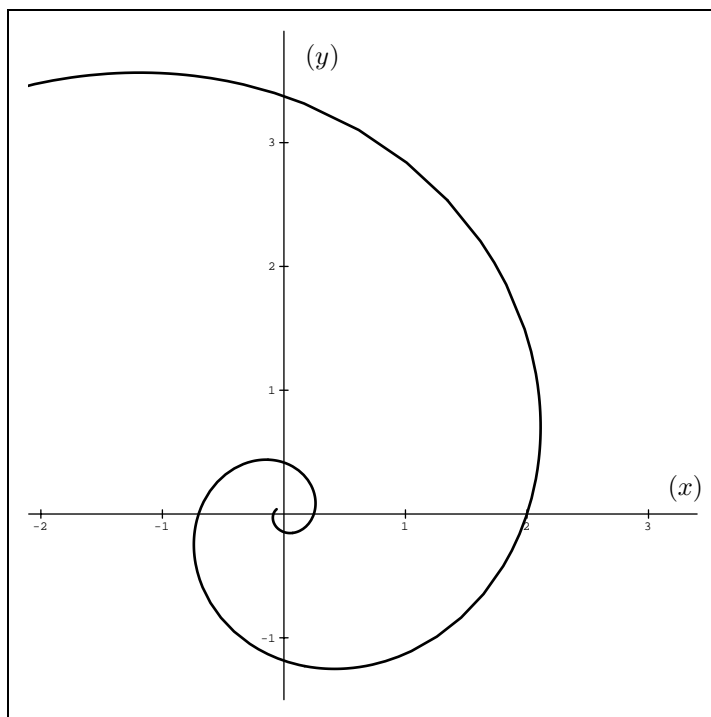


FIG. 9:  
Bernoullispirale

Ist  $P$  ein Punkt der Kurve  $K$ , so wollen wir den Winkel  $\omega$  zwischen dem Vektor  $\vec{OP}$  und dem Tangentialvektor an die Kurve in  $P$  bestimmen (siehe Figur 11). Der Vektor  $\vec{OP}$  hat offenbar die Richtung  $\vec{e} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ , so dass wir erhalten

$$\cos \omega = \frac{\dot{\vec{r}} \cdot \vec{e}}{|\dot{\vec{r}}|} = \frac{k}{(k^2 + 1)^{1/2}} .$$

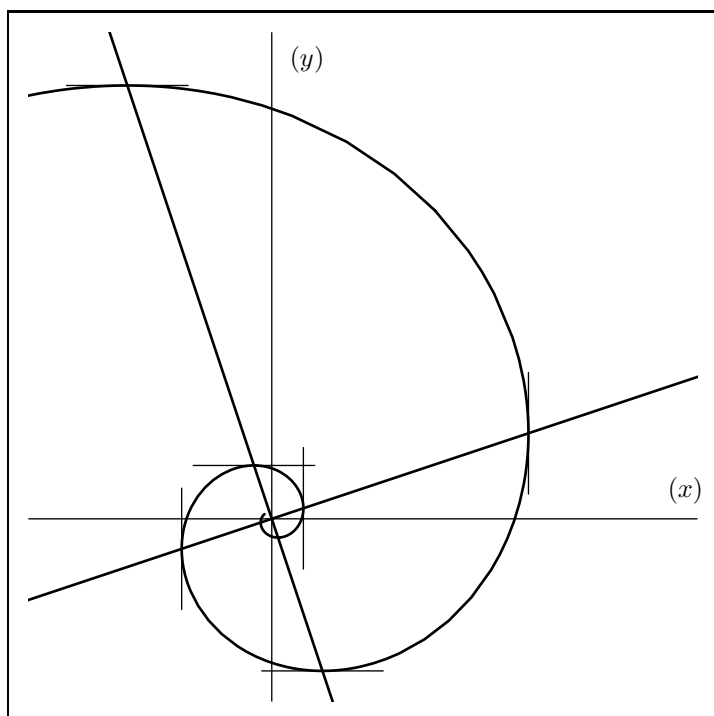


FIG. 10:  
Tangenten an Bernoullispirale

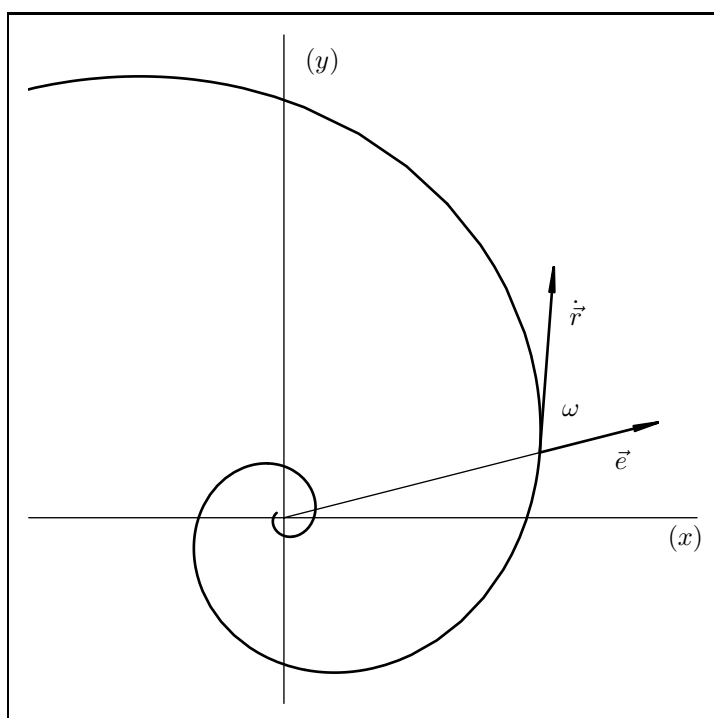
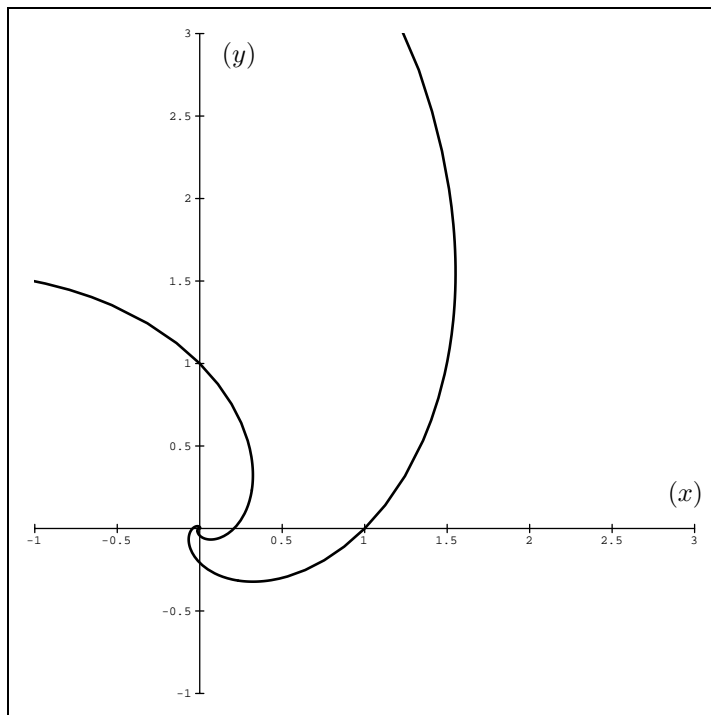


FIG. 11:  
Winkel zwischen Fahrstrahl und  
Tangente


 FIG. 12:  
 Evolute der Bernoullispirale

Insbesondere zeigt es sich, dass  $\omega$  von  $\varphi$  unabhängig ist! Diese – wie wir später sehen werden – charakteristische Eigenschaft der logarithmischen Spirale findet in der Technik häufig Anwendung: die Formgebung von Radialturbinenschaufeln, damit der Dampf- oder Wasserstrahl überall im selben Winkel auftritt; die Formgebung eines Fräsers, damit der Schnittwinkel beim Nachschleifen konstant bleibt. Auch in ganz anderem Zusammenhang tritt sie wegen dieser Eigenschaft auf: in der Bodenphysik spielt sie bei gewissen Modellvorstellungen für Stabilitätsbetrachtungen von Erdlinsen eine Rolle; für viele Motten, die in ihrem Flug einen festen Winkel zum Lichtschimmer einer Kerze einhalten, ist die logarithmische Spirale zum Verderben geworden.

Zum Schluss dieses Abschnittes wenden wir uns noch der Evolute der logarithmischen Spiralen zu, wobei wir der Einfachheit halber den Spezialfall  $C = 1 = k$  betrachten. Wir gehen aus von der Parameterdarstellung

$$\varphi \rightarrow \vec{r}(\varphi) = (e^\varphi \cos \varphi, e^\varphi \sin \varphi), \quad \varphi \in \mathbb{R},$$

und erhalten den zu  $\varphi$  gehörigen Evolutenpunkt  $M_0$  durch Einsetzen in die entsprechende Formel:

$$O\vec{M}_0 = (\xi(\varphi), \eta(\varphi)) = (-e^\varphi \sin \varphi, e^\varphi \cos \varphi).$$

Wiederum stellen wir eine überraschende Tatsache fest: Die Evolute ist nichts anderes als die um  $\pi/2$  um den Ursprung des Koordinatensystems gedrehte Ausgangskurve (siehe Figur 12).